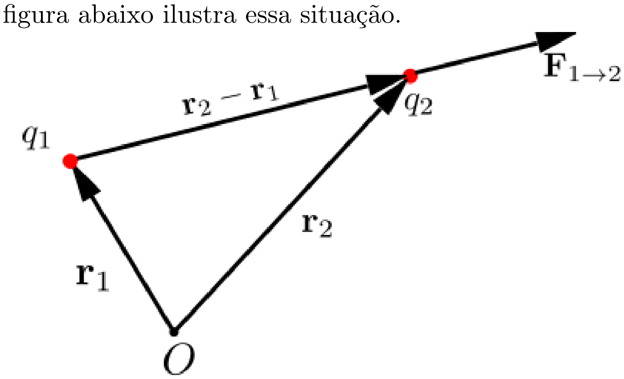
# Expansão de denominadores de distância

Dando uma aula de Físca 3, notei que é uma novidade para estudantes de terceiro semestre como usar expansão em série de potências para simplificar denominadores de distância. Por exemplo, a força de Coulomb, $\mathbf{F}_{1\to 2}$, que uma carga pontual $q_1$, na posição $\mathbf{r}_1$, exerce sobre outra carga pontual $q_2$, na posição $\mathbf{r}_2$, é escrita como

$$\mathbf{F}_{1\to 2} = k\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,.$$

A figura abaixo ilustra essa situação.




Em muitos problemas, como no caso do cálculo do campo elétrico de um dipolo elétrico, precisamos expandir, por exemplo,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}$$

para o caso em que

$$0 < \frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{r}|} \ll 1.$$

Nesta postagem apresento uma fórmula prática para fazer essas expansões em potências de $s/r$, usando a série de Taylor. Especificamente, vou justificar a utilização da fórmula seguinte, muito usada em problemas de Física 3:

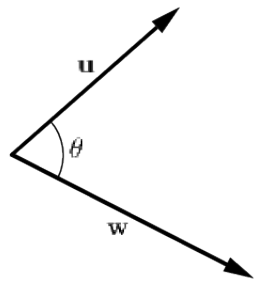
$$(1+\eta)^\alpha \approx 1 + \alpha\eta,$$

para $0 < |\eta| \ll 1$ e qualquer potência real $\alpha$, positiva ou negativa.

O módulo de qualquer vetor $\mathbf{u}$ é obtido da seguinte fórmula:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{w}|\cos\theta,$$

para o produto escalar entre dois vetores, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$, onde $\theta$ é o ângulo entre esses vetores, como indicado na figura abaixo.




Como essa fórmula vale para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$, podemos tomar $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ e aí obtemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad = \quad |\mathbf{u}| \, |\mathbf{u}| \cos 0,$$

já que, neste caso, $\theta = 0$, pois o próprio vetor $\mathbf{u}$ faz um ângulo nulo com relação a si próprio. Então,

$$|\mathbf{u}| \quad = \quad \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

No caso acima, temos que

$$\mathbf{u} \quad = \quad \mathbf{r} - \mathbf{s}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s})} \\ &= \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \\ &= \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + s^2}, \end{aligned}$$

com

$$r \quad \equiv \quad |\mathbf{r}|$$

e

$$s \quad \equiv \quad |\mathbf{s}| \, .$$

Queremos calcular o inverso de $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3$. Então,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \quad = \quad \frac{1}{\left(\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + s^2}\right)^3},$$

que também pode ser escrita assim:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} = \frac{1}{(r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} + s^2)^{3/2}},$$

já que

$$\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} + s^2} = \left(r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} + s^2\right)^{1/2}.$$

Também queremos aproximar essa quantidade para o caso em que $s/r$ é muito menor do que a unidade. Como fazer aparecer esse quociente na expressão acima?

Veja que

$$\begin{aligned}\left(r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} + s^2\right)^{3/2} &= \left[r^2\left(1 - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}\right)\right]^{3/2} \\ &= \left(r^2\right)^{3/2}\left(1 - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}\right)^{3/2} \\ &= r^3\left(1 - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Portanto, quando $r \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} &= \frac{1}{r^3\left(1 - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}\right)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{r^3}\left(1 - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}\right)^{-3/2}.\end{aligned}$$

Veja que agora temos, entre parênteses, quocientes $s/r$ e $s^2/r^2$. Se você está em dúvida onde aparece a primeira ordem, veja que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} &= \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{s}}{r}\right) \\ &= \hat{\mathbf{r}}\cdot\left(\frac{s\hat{\mathbf{s}}}{r}\right) \\ &= (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{s}})\left(\frac{s}{r}\right),\end{aligned}$$

onde os versores $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{s}}$ só indicam direções e sentidos e, portanto, têm módulos unitários. O produto escalar $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{s}}$ é, assim, apenas o cosseno do ângulo entre esses versores e, então, é um número de magnitute menor ou igual a 1. Com isso, fica evidente que o segundo termo entre parênteses na expressão acima para o inverso do cubo da distância $|\mathbf{r}-\mathbf{s}|$ é de ordem $s/r$, que já é, por hipótese, muito menor do que 1. Obviamente, o termo $s^2/r^2$ acima é menor ainda do que $s/r$. Sendo assim, em módulo, a quantidade

$$\eta \equiv -2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2} + \frac{s^2}{r^2}$$

é muito menor do que 1 em módulo e podemos escrever

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} = \frac{1}{r^3}(1+\eta)^{-3/2}.$$

Estamos exatamente no ponto em que temos que expandir $(1+\eta)^{-3/2}$ em uma série de potências de $\eta$. Para tornar a análise mais geral, podemos considerar o caso em que temos $(1+\eta)^{\alpha}$, com $\alpha$ uma potência real qualquer. Podemos, então, definir uma função assim:

$$f(\eta) \equiv (1+\eta)^{\alpha}$$

e usar uma expansão de Taylor em potências de $\eta$. Na postagem Expansão em série de Taylor eu demonstro a fórmulação de Taylor e, no presente caso, até primeira ordem em $\eta$, temos:

$$f(\eta) \approx f(0)+\eta f'(0).$$

É fácil ver que

$$f'(\eta) = \alpha(1+\eta)^{\alpha-1}.$$

Logo,

$$f'(0) = \alpha$$

e

$$f(\eta) \approx 1+\alpha\eta.$$

Portanto, deduzimos a fórmula muito conveniente e que é repetidas vezes utilizada em cursos de graduação:

$$(1+\eta)^{\alpha} \approx 1+\alpha\eta,$$

para quaisquer $\alpha, \eta \in \mathbb{R}$ e $0<|\eta|\ll 1$.

Para nosso caso particular,

$$\eta \equiv -2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}+\frac{s^2}{r^2}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} &= \frac{1}{r^3}(1+\eta)^{-3/2} \\ &\approx \frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}+\frac{s^2}{r^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{r^3}+\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^5}-\frac{3s^2}{2r^5}. \end{aligned}$$

Só que estamos interessados em uma expansão até primeira ordem em $s/r$ e, portanto, por consistência, desprezamos o terceiro termo, ficando com

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} \approx \frac{1}{r^3}+\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^5}.$$

Se quiséssemos manter o terceiro termo na expansão, então não deveríamos ter usado a série de Taylor acima até primeira ordem em $\eta$ apenas, mas teríamos que ter incluído mais o termo proporcional a $\eta^2$, isto é,

$$f(\eta) \approx f(0)+\eta f'(0)+\frac{\eta^2}{2}f''(0),$$

onde

$$f''(\eta) = \alpha(\alpha-1)(1+\eta)^{\alpha-2}$$

e, assim,

$$f''(0) = \alpha(\alpha-1).$$

Com isso, a fórmula prática já não fica tão simples:

$$(1+\eta)^{\alpha} \approx 1+\alpha\eta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\eta^2.$$

Na nossa particular aplicação, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} &= \frac{1}{r^3}(1+\eta)^{-3/2} \\
&\approx \frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}+\frac{s^2}{r^2}\right)+\frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}+\frac{s^2}{r^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{r^3}\left[1+\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}-\frac{3s^2}{2r^2}+\frac{15}{8}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}+\frac{s^2}{r^2}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Veja que esta fórmula vai incluir termos de ordem $s^3/r^3$ e $s^4/r^4$ quando elevarmos ao quadrado os termos que estão entre parênteses. Mas isso é inconsistente com nossa aproximação de mantermos até segunda ordem em $s/r$. Então, só manteremos o quadrado de $-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}/r^2$ que, como já vimos acima, é um termo que, ao quadrado, vai fornecer uma contribuição de segunda ordem em $s/r$. Logo,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} \approx \frac{1}{r^3}\left[1+\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}-\frac{3s^2}{2r^2}+\frac{15}{8}\left(-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}\right)^2\right],$$

ou seja,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} \approx \frac{1}{r^3}\left[1+\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{r^2}-\frac{3s^2}{2r^2}+\frac{15}{2}\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})^2}{r^4}\right],$$

ou ainda,

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^3} \quad \approx \quad \frac{1}{r^3}+\frac{3\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{s}}{r^4}+\frac{15\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{s}\right)^2-3s^2}{2r^5}.$$

Note que estamos usando a definição do versor $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\hat{\mathbf{r}} \quad \equiv \quad \frac{\mathbf{r}}{r}.$$