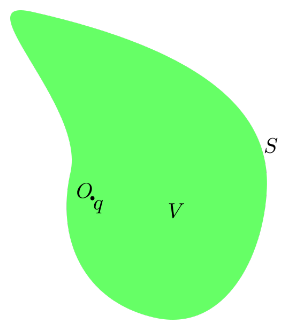
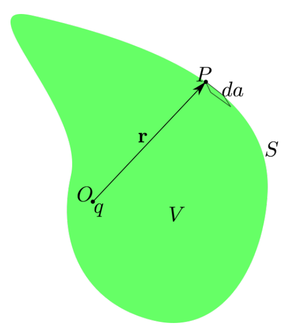
A lei de Gauss

A lei de Gauss afirma que o fluxo do campo elétrico total através da fronteira de uma região do espaço é igual ao valor total de carga no interior dessa região, dividido pela permissividade elétrica do vácuo, no sistema internacional de unidades. Nesta postagem vamos calcular esse fluxo explicitamente.

Vamos considerar uma região V do espaço, cuja fronteira é a superfície fechada S. Vamos imaginar que haja uma carga pontual de valor q no interior da região V. Escolhamos a origem do sistema de coordenadas sobre a carga q. A figura abaixo ilustra essa situação.

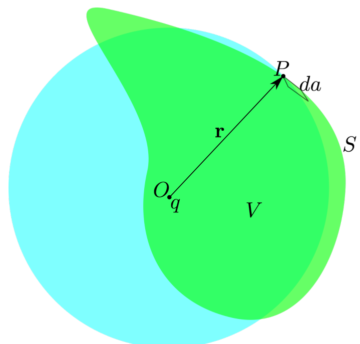


Agora vamos escolher um elemento de área, da, da superfície S e tomar um ponto P como sendo um vértice desse elemento de área. Podemos definir o vetor posição do ponto P como sendo $\mathbf{r}$, como mostra a figura abaixo.

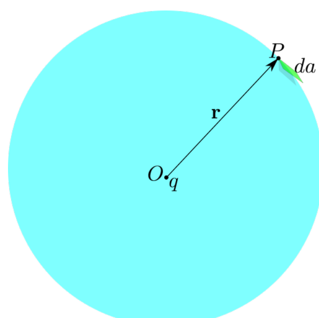


O pequeno elemento de área da escolhemos de tal forma que dois de seus lados, partindo do vértice em P, sejam ortogonais, um no plano $r\theta$ e o outro no plano $r\varphi$, de um sistema de coordenadas esféricas centrado na origem O. Note que qualquer partição da superfície S pode ser obtida com elementos de área exatamente assim, com dois lados sempre ortogonais e contidos, respectivamente, nos planos $r\theta$ e $r\varphi$. Note também que, para cada ponto P, dada uma origem O, há um vetor posição $\mathbf{r}$ e, dado um sistema de coordenadas, podemos definir, para cada ponto P, planos $r\theta$, $r\varphi$ e $\theta\varphi$ mutuamente ortogonais, cuja interseção dos três é o ponto P.

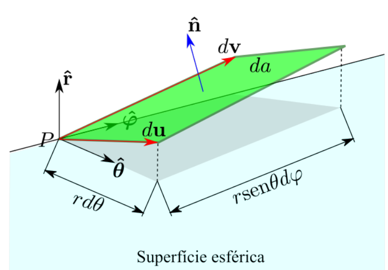
É evidente que podemos traçar uma superfície esférica centrada na origem O e de raio $r = |\mathbf{r}|$, como na figura abaixo.



Vamos nos atentar só para o elemento de área da e, portanto, vamos esquecer o restante da superfície S, como mostra a figura a seguir.



Podemos, agora, fazer uma ampliação da região do elemento de área da, como indicado na figura abaixo.



Veja que, na figura, pela maneira que escolhemos os vetores $d\mathbf{u}$ e $d\mathbf{v}$, ortogonais entre si, o primeiro pertencendo ao plano $r\theta$ e o segundo pertencendo ao plano $r\varphi$, fica evidente que podemos escrever

$$d\mathbf{u} \quad = \quad \hat{\mathbf{r}}du_r + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta$$

e

$$d\mathbf{v} \;=\; \hat{\mathbf{r}}dv_r + \hat{\boldsymbol{\varphi}}r\text{sen}\theta d\varphi.$$

As quantidades du_r e dv_r são as componentes ao longo de $\hat{\mathbf{r}}$ desses vetores infinitesimais, $d\mathbf{u}$ e $d\mathbf{v}$, respectivamente. Na figura, $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal à superfície S nas vizinhanças do ponto P. Fica claro da figura e das propriedades do produto vetorial que

$$d\mathbf{u} \times d\mathbf{v} \;=\; \hat{\mathbf{n}}da.$$

Note que, em geral, o versor normal, $\hat{\mathbf{n}}$, não é paralelo ao versor radial, $\hat{\mathbf{r}}$.

Agora podemos calcular o fluxo do campo elétrico devido à carga q na origem O através do elemento de área da :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}\cdot\left(d\mathbf{u}\times d\mathbf{v}\right),
\end{aligned}$$

já usando a relação acima entre o elemento de área da e os vetores $d\mathbf{u}$ e $d\mathbf{v}$. Vamos, então, calcular o produto vetoria entre $d\mathbf{u}$ e $d\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{u}\times d\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ du_r & rd\theta & 0 \\ dv_r & 0 & r\text{sen}\theta d\varphi \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{r}}r^2\text{sen}\theta d\theta d\varphi - \hat{\boldsymbol{\theta}}du_r r\text{sen}\theta d\varphi - \hat{\boldsymbol{\varphi}}dv_r rd\theta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\left(d\mathbf{u}\times d\mathbf{v}\right) \;=\; r^2\text{sen}\theta d\theta d\varphi$$

e o fluxo do campo elétrico sobre o elemento de área da dá

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}r^2\text{sen}\theta d\theta d\varphi \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\text{sen}\theta d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Veja que r^2 no numerador cancela r^2 no denomidador e o elemento de fluxo fica independente de r. Isso quer dizer que, independentemente da forma da superfície S, porque o campo elétrico varia com o inverso do quadrado de r, segue que a projeção de cada elemento de área da, da superfície S, sobre a superfície de uma esfera de raio unitário, centrada em O, contribui para o fluxo exatamente o mesmo valor que o elemento de área da contribui. Por causa disso, a integração do fluxo sobre toda a superfície S fica só uma integral dupla nas variáveis angulares, cobrindo a esfera de raio unitário centrada na origem:

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\,\text{sen}\theta \\
&= \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)2\pi\int_0^{\pi} d\theta\,\text{sen}\theta \\
&= \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(-\cos\theta|_0^{\pi}\right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \quad = \quad \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(1+1\right),$$

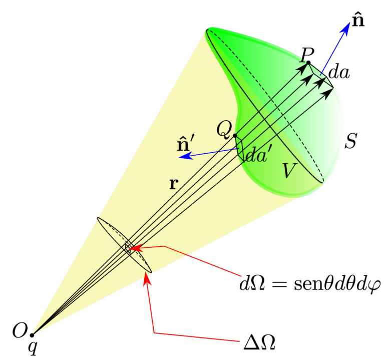
ou seja,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \quad = \quad \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Mais abaixo vou explicar por que isso vale até quando a superfície S não é convexa, como é o caso da que estamos considerando aqui. Ah, falta eu dizer o que é uma superfície convexa: é toda superfície que, quando atravessada por uma linha reta, só é "perfurada" em dois pontos. Veja que esse não é o caso de nossa superfície S, das figuras acima.

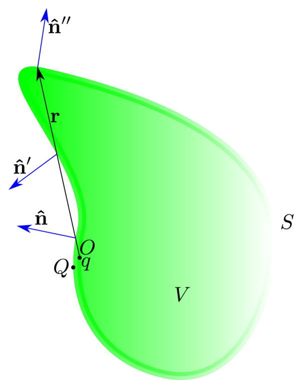
Quando temos uma distribuição de cargas pontuais dentro da região V, usamos o princípio de superposição e mostramos que o fluxo do campo elétrico resultante dessa distribuição é igual ao valor algébrico total da carga dentro da região V, dividido por ε_0. Por valor algébrico entendemos o total obtido quando as cargas positivas são somadas e as negativas são subtraídas.

E o que acontece se uma carga pontual estiver fora da região V? É simples: o fluxo do campo elétrico dessa carga externa será nulo. Para ver isso, note que vai haver uma abertura angular em θ e outra em φ, resultando em um ângulo sólido $\Delta\Omega$ que vai conter totalmente a região V conforme é vista da origem, agora escolhida sobre a carga externa a V. Veja a figura abaixo.

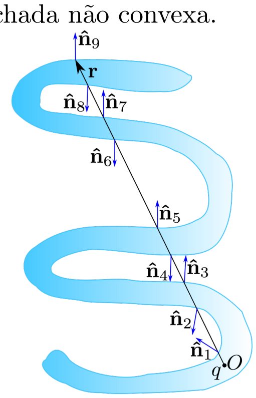


Uma parte da superfície S terá a normal fazendo um ângulo menor que $\pi/2$ com o sentido de $\hat{\mathbf{r}}$, dando $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}} > 0$, em cada ponto dessa parte, enquanto que outra parte da superfície S terá a normal fazendo um ângulo maior do que $\pi/2$ com o sentido de $\hat{\mathbf{r}}$, dando $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}} < 0$, em cada ponto dessa outra parte. (É claro que em pontos onde $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$ não há contribuição para o fluxo, pois nesse caso o campo elétrico é tangente à superfície S nesses pontos.) Essas duas partes terão a mesma projeção sobre uma esfera de raio unitário centrada em O. Logo, como o fluxo do campo elétrico sobre cada elemento de área independe de r, cada lado da superfície S vai contribuir com o mesmo valor absoluto para o fluxo do campo elétrico, só que com sinais opostos e, assim, o fluxo total será nulo.

Essa figura também deixa claro por que o fluxo através da superfíce S, que não é convexa, pode ainda ser calculado como o fizemos: a parte não convexa vai ter sempre um número ímpar de elementos de área ao longo das direções radiais passando pelos pontos dessa parte não convexa. Um deles fará uma contribuição líquida como vimos, enquanto os outros vão se cancelar mutuamente. Por exemplo, ainda nessa figura, se escolhermos colocar a carga q logo dentro de S, pertinho do ponto Q (mas dentro de S), fica fácil ver que vai haver direções radiais cruzando S três vezes. Veja a figura abaixo.



Duas vezes teremos a normal fazendo um ângulo menor do que $\pi/2$ com o versor radial, enquanto o cruzamento do meio fará um ângulo maior do que $\pi/2$, resultando em apenas uma contribuição não nula e positiva para o fluxo elétrico, já que as três contribuições, pelo que vimos, têm o mesmo valor absoluto. Na figura que segue ainda mostro mais uma situação, para uma outra superfície fechada não convexa.



A consequência é que o fluxo do campo elétrico total sobre uma superfície fechada S é igual à carga total dentro da região V de fronteira S, dividida por ε_0, independentemente se esse campo elétrico também é parcialmente gerado por cargas externas a V. E assim deduzimos a lei de Gauss.

Resumindo,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \quad = \quad \frac{Q_V}{\varepsilon_0},$$

onde **E** é o campo elétrico total sobre cada ponto da superfície fechada S e Q_V é o valor algébrico total de carga interna à região V, cuja fronteira é dada pela superfície fechada S. É importante notar que as cargas externas a V contribuem para o valor de **E**, mas não contribuem para o valor do fluxo de **E** através de S.