O teorema de Helmholtz

Nesta postagem vamos ver que se o divergente e o rotacional de um campo vetorial determinam o campo vetorial. Além disso, veremos que o campo indução magnética, que tem divergente nulo, é determinado em termos de seu rotacional apenas. Com o uso da lei de Ampère & Maxwell, mostraremos que o campo indução magnética se expressa como o resultado de um rotacional de um outro campo vetorial, chamado potencial vetorial.

Comecemos com a representação da "função" delta de Dirac em termos do laplaciano do inverso da distância entre os vetores posição de dois pontos no espaço, isto é,

$$\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Então, qualquer campo vetorial diferenciável, $\mathbf{G}\left(\mathbf{r},t\right)$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\left(\mathbf{r},t\right) &= \int_V d^3r'\,\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r},t\right) = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\nabla^2\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right],$$

já que o laplaciano só opera na variável $\mathbf{r}$ e $\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)$ não depende dessa variável. Mas,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\} = \boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}-\nabla^2\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right],$$

ou ainda,

$$\nabla^2\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] = \boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}-\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}.$$

Então, podemos substituir este resultado no integrando acima e obter

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\left(\mathbf{r},t\right) = &-\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}\\ &+\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\,\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\},\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\left(\mathbf{r},t\right) = &-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\left\{\int_V d^3r'\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}\\ &+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\int_V d^3r'\,\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Agora é fácil ver que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right] &= \mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)\\ &= -\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right] &= -\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\times\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)\\ &= \mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\times\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right).\end{aligned}$$

Mas,

$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right] = \frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}+\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)$$

e, portanto,

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right) = \boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right]-\frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}.$$

Logo,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right] = \frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}-\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right].$$

Analogamente,

$$\boldsymbol{\nabla}'\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right] = \frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}-\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\times\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right)$$

e, portanto,

$$\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)\times\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right) = \frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}-\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right].$$

Logo,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right] = \frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}-\boldsymbol{\nabla}'\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\left(\mathbf{r},t\right) &= -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\left\{\int_V d^3r'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}-\int_V d^3r'\,\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right]\right\}\\ &\quad+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left\{\int_V d^3r'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}-\int_V d^3r'\,\boldsymbol{\nabla}'\times\left[\frac{\mathbf{G}\left(\mathbf{r}',t\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Vamos tomar V como sendo todo o volume do espaço. Então, usando o teorema da divergência de Gauss, podemos escrever:

$$\int_V d^3r'\, \boldsymbol{\nabla}' \cdot \left[\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \quad = \quad \oint_{S_\infty} da'\, \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Se o ponto de observação, com vetor posição $\mathbf{r}$, está a uma distância finita da origem e se a distância da origem até os pontos com vetores posição $\mathbf{r}'$, sobre a superfície S_∞, for infinita, segue que

$$\oint_{S_\infty} da'\, \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \to \quad \oint_{S_\infty} da'\, \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}'|}.$$

Neste caso, o elemento de área da' é proporcional a $|\mathbf{r}'|^2$ e, portanto,

$$\oint_{S_\infty} da'\, \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \to \quad \oint_{4\pi} d\Omega\, |\mathbf{r}'|\, \hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t),$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido subtendendo o elemento de área da'. Supondo, portanto, que para t finito o campo $\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)$ é nulo sobre S_∞ ou, caso o campo seja independente de t, então varia com o inverso do quadrado de $|\mathbf{r}'|$ ou como $|\mathbf{r}'|^n$, com $n > 2$, segue que

$$\oint_{S_\infty} da'\, \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \to \quad 0,$$

implicando que

$$\int_V d^3r'\, \boldsymbol{\nabla}' \cdot \left[\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \quad \to \quad 0,$$

para $V = \mathbb{R}^3$, e podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{r},t) \quad = \quad & -\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \left[\int_V d^3r'\, \frac{\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \times \left\{ \int_V d^3r'\, \frac{\boldsymbol{\nabla}' \times \mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int_V d^3r'\, \boldsymbol{\nabla}' \times \left[\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Usando o lema de Gauss, podemos também escrever:

$$\int_V d^3r'\, \boldsymbol{\nabla}' \times \left[\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \quad = \quad \oint_{S_\infty} da'\, \hat{\mathbf{n}}' \times \left[\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right]$$

e, através de um raciocínio completamente análogo ao usado acima, supondo que para t finito o campo $\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)$ é nulo sobre S_∞ ou, caso o campo seja independente de t, então varia com o inverso do quadrado de $|\mathbf{r}'|$ ou como $|\mathbf{r}'|^n$, com $n > 2$, segue que

$$\int_V d^3r'\, \boldsymbol{\nabla}' \times \left[\frac{\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \quad \to \quad \mathbf{0}.$$

Com isso, podemos escrever:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\left[\int_V d^3r'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\int_V d^3r'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{G}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right],$$

que é o teorema de Helmholtz. Vejamos que o primeiro termo do segundo membro deste resultado tem rotacional nulo e o segundo termo tem o divergente nulo.

No caso particular do campo indução magnética, que tem seu divergente nulo em todo ponto do espaço, segue que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\int_V d^3r'\,\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\mathbf{B}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right].$$

Portanto, vemos que, como $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0$, segue que existe um campo vetorial, que denotaremos $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, tal que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\,.$$

O campo $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ é chamado de potencial vetorial.