

Os potenciais vetorial e escalar no sistema MKS

Atalho para o entendimento

Reginaldo

nerdyard.com

16 de outubro de 2016



As equações de Maxwell no vácuo no MKS

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Caso geral: tudo depende do tempo

Todas as grandezas são dependentes, em princípio, do espaço e do tempo, isto é,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$$

e

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t).$$

Potencial vetorial

Do fato de que na teoria eletromagnética tradicional não existem monopolos magnéticos, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

e daí segue que existe um campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

O campo $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é chamado de potencial vetorial. Há também quem o chame de potencial vetor ou vetor potencial. No entanto, a expressão utilizada nos livros em inglês é “vector potential” e eu a traduzo para o português como potencial vetorial. Nessas nossas discussões, portanto, estarei sempre chamando de potencial vetorial o campo \mathbf{A} .

Consequência para o campo elétrico

Podemos substituir $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ na lei da indução de Faraday. Assim, a equação

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

fica

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}.$$

O potencial escalar

Como o rotacional do campo $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$ é nulo em todo lugar, segue que existe um campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi,$$

isto é,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

O campo $\phi(\mathbf{r}, t)$ é chamado de potencial escalar e o sinal de menos que aparece é introduzido para recuperarmos o caso eletrostático quando \mathbf{A} não depender do tempo.

Só precisamos de quatro e não de seis funções!

Em suma, se conhecermos os potenciais vetorial e escalar, poderemos calcular os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} seguindo a prescrição expressa pelas equações:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

e

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$