Os potenciais vetorial e escalar no sistema MKS

Para cursos de pós-graduação normalmente uso o sistema CGS de unidades, talvez por minha formação ter sido feita no CGS. No entanto, na graduação é comum usar o sistema MKS. Na presente postagem vamos apresentar os potenciais vetorial e escalar no sistema MKS, de maneira paralela ao que já publiquei antes, na postagem Os potenciais vetorial e escalar.

As equações de Maxwell, no vácuo, no sistema MKS são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

onde todas as grandezas são dependentes, em princípio, do espaço e do tempo, isto é,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$$

e

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t).$$

Mas sabemos que quando o divergente de um campo é nulo em todo lugar, segue que esse campo deve ser o rotacional de outro campo. Assim, de

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

segue que existe um campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

O campo $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é chamado de potencial vetorial. Há também quem o chame de potencial vetor ou vetor potencial. No entanto, a expressão utilizada nos livros em inglês é “vector potential” e eu a traduzo para o português como potencial vetorial. Nessas nossas discussões, portanto, estarei sempre chamando de potencial vetorial o campo $\mathbf{A}$.

Podemos substituir $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ na lei da indução de Faraday. Assim, a equação

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

fica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \right) \\ &= -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0},$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}.$$

Então, como o rotacional do campo $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ é nulo em todo lugar, segue que existe um campo escalar $\phi = \phi \left(\mathbf{r}, t \right)$ tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} \phi,$$

isto é,

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

O campo $\phi \left(\mathbf{r}, t \right)$ é chamado de potencial escalar e o sinal de menos que aparece acima, na frente do gradiente de ϕ, é introduzido para recuperarmos o caso eletrostático quando $\mathbf{A}$ não depender do tempo.

Em suma, se conhecermos os potenciais vetorial e escalar, poderemos calcular os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ seguindo a prescrição expressa pelas equações:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}.$$

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).