Invariância de calibre ou gauge

Atalho para o entendimento

Reginaldo

nerdyard.com

16 de outubro de 2016

Os potenciais vetorial e escalar

Como explicado na postagem, Os potenciais vetorial e escalar no sistema MKS, o fato de que não há monopolos magnéticos implica a existência de um potencial vetorial, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} \;=\; 0,$$

então, $\exists \mathbf{A} = \mathbf{A}\left(\mathbf{r}, t\right)$ tal que

$$\mathbf{B} \;=\; \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}.$$

Substituindo esse resultado na lei de Faraday, temos

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \;=\; \mathbf{0}.$$

Então, $\exists \phi = \phi\left(\mathbf{r}, t\right)$ tal que

$$\mathbf{E} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

A lei de Gauss em termos dos potenciais

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ou seja,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

A lei de Ampère & Maxwell em termos dos potenciais

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \;=\; \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right),$$

com

$$c \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}},$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \;=\; -\mu_0 \mathbf{J}.$$

E se pudermos desacoplar as equações para os potenciais?

Notemos que se

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \qquad \text{(calibre de Lorentz)}$$

teremos

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Mas podemos impor o calibre de Lorentz e ainda assim obter os campos **E** e **B** que satisfazem as equações de Maxwell?

Sim, nós podemos!

Suponha que os campos eletromagnéticos sejam dados por um par de potenciais, ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ que não satisfaçam o calibre de Lorentz:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \ .$$

Então, vamos escolher novos potenciais, ϕ e $\mathbf{A}$, tais que:

$$\phi = \phi_1 - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla\chi,$$

onde $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ é uma função arbitrária do espaço e do tempo.

Invariância dos campos eletromagnéticos

Com isso, calculemos:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (\mathbf{A}_1 + \nabla\chi) \\
&= \nabla \times \mathbf{A}_1 \\
&= \mathbf{B},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla\left(\phi_1 - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_1 + \nabla\chi) \\
&= -\nabla\phi_1 + \nabla\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\chi) \\
&= -\nabla\phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \\
&= \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

Só precisamos escolher a função de calibre!

Uma vez que temos os mesmos campos para qualquer escolha da função de calibre, $\chi\left(\mathbf{r},t\right)$, podemos escolher χ de forma a fazer com que os novos potenciais satisfaçam o calibre de Lorentz, fixando esse calibre! Para isso, basta impor que os novos potenciais satisfaçam o calibre de Lorentz e econtrarmos a equação resultante que χ deve satisfazer:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\nabla}\chi\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_1-\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla^2\chi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_1-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}.$$

Há infinitos outros calibres, como, por exemplo, o calibre de Coulomb, para o qual $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$.