Invariância de calibre ou gauge

Em eletrostática você provavelmente sabe que há o chamado potencial eletrostático, que pode ser calculado pela integral volumétrica da densidade de carga dividida pela distância entre o elemento de carga e o ponto de observação. O campo eletrostático é dado pelo negativo do gradiente do potencial eletrostático. O que se mede é apenas a diferença de potencial entre dois pontos, de forma que o valor do potencial é definido a menos de uma constante arbitrária. Em outras palavras, o que é fisicamente mensurável é o campo eletrostático. Logo, há infinitos potenciais diferentes dando o mesmo campo eletrostático. Nesta postagem vamos ver que a invariância dos campos eletromagnéticos se manifesta também no caso geral, dependente do tempo, e envolve uma infinidade de escolhas possíveis para os potenciais escalar e vetorial.

Como explicado na postagem, Os potenciais vetorial e escalar no sistema MKS, o fato de que não há monopolos magnéticos implica na existência de um potencial vetorial, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0 \quad\Rightarrow\quad \exists\mathbf{A}=\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right)\ \text{tal que}\ \mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}.$$

Substituindo esse resultado na lei de Faraday, temos

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}.$$

Então,

$$\exists\phi=\phi\left(\mathbf{r},t\right)\ \text{tal que}\ \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Com isso, a lei de Gauss fica

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

onde, para simplificar, estamos considerando os campos no vácuo. A lei de Ampère & Maxwell dá

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right) = \mu_0\mathbf{J}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right),$$

com

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}},$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{J}.$$

Notemos que se

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

teremos

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}. \qquad (3)$$

Mas podemos impor a Eq. (1) e ainda assim obter os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ que satisfazem as equações de Maxwell? A resposta é afirmativa e a razão é que há infinitos potenciais que resultam nos mesmos campos eletromagnéticos! Desses infinitos potenciais, um par ϕ e $\mathbf{A}$ satisfazendo a Eq. (1) é sempre possível para todos os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazendo as equações de Maxwell, quaisquer que sejam as fontes ρ e $\mathbf{J}$. A escolha de calibre dada pela Eq. (1) é conhecida como o calibre (ou gauge) de Lorentz. Há infinitos outros calibres, como, por exemplo, o calibre de Coulomb, para o qual $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$. Para vermos isso, suponha que os campos eletromagnéticos sejam dados por um par de potenciais, ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ que não satisfaçam a Eq. (1):

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_1$$

e

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}.$$

Então, vamos escolher novos potenciais, ϕ e $\mathbf{A}$, tais que:

$$\phi = \phi_1 - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad (4)$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\nabla}\chi, \qquad (5)$$

onde

$$\chi = \chi(\mathbf{r},t)$$

é uma função arbitrária do espaço e do tempo. Com isso, calculemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} &= \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\nabla}\chi)\\ &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_1\\ &= \mathbf{B},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi_1 - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\nabla}\chi)\\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\chi)\\ &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}\\ &= \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Logo, fica evidente que, para qualquer função $\chi(\mathbf{r},t)$, podemos trocar os potenciais usando as chamadas transformações de calibre, Eqs. (4) e (5), e os mesmos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são obtidos com os novos potenciais. Em outras palavras, as equações de Maxwell são invariantes por transformações de calibre, Eqs. (4) e (5). Uma vez que temos os mesmos campos para qualquer escolha da função de calibre, $\chi(\mathbf{r},t)$, podemos escolher χ de forma a fazer com que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1), fixando o calibre de Lorentz! Para isso, basta impor que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1) e econtrarmos a equação resultante que χ deve satisfazer:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

isto é, usando as Eqs. (4) e (5),

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\nabla}\chi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_1 - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_1}{\partial t}. \qquad (6)$$

Assim, uma vez que supusemos que ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ não satisfazem a Eq. (1), segue que basta encontrarmos uma função χ satisfazendo a Eq. (6) e encontraremos um novo par de potenciais, através do uso das Eqs. (4) e (5), que satisfarão a Eq. (1) e, ao mesmo tempo, darão os mesmos campos eletromagnéticos satisfazendo as equações de Maxwell com as mesmas fontes de carga e corrente. E, além disso, no caso do calibre de Lorentz, a Eq. (6) tem o mesmo tipo que as Eqs. (4) e (5). Portanto, resolvendo a equação de onda com fonte encontramos ϕ, $\mathbf{A}$ e χ.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).