A radiação de um dipolo oscilante

Como um exemplo de aplicação dos potenciais retardados no calibre de Lorentz, vamos calcular a potência irradiada por um dipolo oscilante. Nesta postagem você vai encontrar uma riqueza de detalhes e uma abundância de passagens algébricas que não são vistas nos livros-texto usualmente. Espero que você goste.

Consideremos duas esferas carregadas com cargas $+q$ e $-q$, localizadas nos pontos $(0,0,l/2)$ e $(0,0,-l/2)$, respectivamente, conectadas por um fio ao longo do eixo z. Se as cargas variarem no tempo, segue que deverá haver corrente através do fio conectando as esferas, já que a carga é conservada. Assim,

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

indicando que a corrente será positiva quando a carga em $(0,0,l/2)$ aumentar algebricamente. Nesse caso,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)\,d^3r' = \hat{\mathbf{z}}I(t)\,dz',$$

já que somente a componente z da densidade de corrente não é nula. Utilizando o potencial vetorial retardado, escrevemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} dz'\,\frac{I\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\hat{\mathbf{z}}z'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\hat{\mathbf{z}}z'|}.$$

Suponhamos que

$$r \gg l.$$

Nesse caso, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$|\mathbf{r}-\hat{\mathbf{z}}z'| \approx r - z'\cos\theta',$$

onde

$$\cos\theta' = \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}}}{r}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &\approx \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} dz'\,\frac{I\left(t-\frac{r-z'\cos\theta'}{c}\right)}{r-z'\cos\theta'}\\ &\approx \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2} dz'\left(1+\frac{z'}{r}\cos\theta'\right)I\left(t-\frac{r}{c}+\frac{z'\cos\theta'}{c}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\frac{|z'|}{r} \ll 1,$$

podemos desprezar a quantidade

$$\frac{z'}{r}\cos\theta'$$

que aparece entre parênteses no integrando. No entanto, no argumento da corrente, o termo

$$\frac{z'\cos\theta'}{c}$$

somente pode ser desprezado frente a r/c se a corrente variar muito pouco durante o tempo dado por esse termo. Supondo que a corrente seja periódica, podemos expandi-la em série de Fourier. Vamos também supor que o período da corrente seja muito maior do que o tempo acima e, portanto, teremos

$$\frac{|z'\cos\theta'|}{c} \ll T, \text{ para todo } z' \in [-l/2, l/2],$$

ou seja,

$$\frac{l}{2} \ll cT = \lambda,$$

onde λ é o comprimento de onda da radiação emitida pelo dipolo oscilante. Portanto, se o dipolo for muito menor comparado com o comprimento de onda e o ponto de observação for muito distante do dipolo, segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &\approx \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{-l/2}^{l/2} dz'\, I\left(t-\frac{r}{c}\right) \\
&= \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r} lI\left(t-\frac{r}{c}\right).
\end{aligned}$$

Usando o calibre de Lorentz,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= -c^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} \\
&= -c^2\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r} lI\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \\
&= -\frac{\mu_0 l c^2}{4\pi}\left[-\frac{z}{r^3}I\left(t-\frac{r}{c}\right)-\frac{z}{r^2 c}\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right].
\end{aligned}$$

Como a corrente é a derivada temporal da carga,

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^2}\left[\frac{q\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}+\frac{I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}\right].$$

Agora introduzimos as funções para a carga e a corrente:

$$\begin{aligned}
q\left(t-\frac{r}{c}\right) &= q_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right], \\
I\left(t-\frac{r}{c}\right) &= -q_0\omega\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].
\end{aligned}$$

Em coordenadas polares esféricas,

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r}\left\{\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx -\hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r} lq_0\omega\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

Como

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi+\hat{\mathbf{y}}\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi+\hat{\mathbf{z}}\cos\theta, \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos\varphi+\hat{\mathbf{y}}\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi-\hat{\mathbf{z}}\,\mathrm{sen}\theta, \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{sen}\varphi+\hat{\mathbf{y}}\cos\varphi,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{r}}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right)+\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right) \\
&= \hat{\mathbf{r}}\cos\theta-\hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx -\hat{\mathbf{r}}\frac{\mu_0}{4\pi r} lq_0\omega\cos\theta\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mu_0}{4\pi r} lq_0\omega\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].$$

Agora basta calcularmos os campos:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\\ &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(r\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{A}\right)}{\partial r}-\frac{\partial\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\right)}{\partial\theta}\right]\\ &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0}{4\pi rc}lq_0\omega^2\mathrm{sen}\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &- \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0}{4\pi r^2}lq_0\omega\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &= -\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{lq_0\omega}{r}\mathrm{sen}\theta\left\{\frac{\omega}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\\ &= -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\phi}{\partial r}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial r} &= \frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r^2}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{\omega}{rc}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\\ &= \frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left\{\left(\frac{\omega^2}{rc^2}-\frac{2}{r^3}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{2\omega}{r^2c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{sen}\theta}{r}\left\{\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= -\hat{\mathbf{r}}\frac{\mu_0}{4\pi r}lq_0\omega\cos\theta\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mu_0}{4\pi r}lq_0\omega\mathrm{sen}\theta\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &= -\hat{\mathbf{r}}\frac{\mu_0}{4\pi r}lq_0\omega^2\cos\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mu_0}{4\pi r}lq_0\omega^2\mathrm{sen}\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\hat{\mathbf{r}}\frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left\{\left(\frac{\omega^2}{rc^2}-\frac{2}{r^3}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{2\omega}{r^2c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\\ &+ \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{lq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{sen}\theta}{r}\left\{\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{\omega}{c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\\ &+ \hat{\mathbf{r}}\frac{\mu_0}{4\pi r}lq_0\omega^2\cos\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\mu_0}{4\pi r}lq_0\omega^2\mathrm{sen}\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\hat{\mathbf{r}}\frac{2lq_0\omega}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left\{-\frac{1}{\omega r^3}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r^2c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}\\ &+ \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{lq_0\omega}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{sen}\theta\left\{\left(\frac{1}{\omega r^3}-\frac{\omega}{rc^2}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{1}{r^2c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}.\end{aligned}$$

O vetor de Poynting é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\\ &= -\frac{1}{\mu_0}\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}\frac{2lq_0\omega}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta f\left(r,t\right)\\ &+ \frac{1}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{\theta}}\times\mathbf{B}\frac{lq_0\omega}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{sen}\theta g\left(r,t\right),\end{aligned}$$

onde definimos

$$f(r,t) = \left\{-\frac{1}{\omega r^3}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r^2c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}$$

e

$$g(r,t) = \left\{\left(\frac{1}{\omega r^3}-\frac{\omega}{rc^2}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]-\frac{1}{r^2c}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= -\hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{lq_0\omega}{4\pi}\right)^2\frac{2}{r\varepsilon_0}\mathrm{sen}\theta\cos\theta f(r,t)\,h(r,t)\\ &- \hat{\mathbf{r}}\left(\frac{lq_0\omega}{4\pi}\right)^2\frac{1}{r\varepsilon_0}\mathrm{sen}^2\theta g(r,t)\,h(r,t),\end{aligned}$$

com

$$h(r,t) = \left\{\frac{\omega}{c}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{1}{r}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}.$$

Assim,

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S} = -\left(\frac{lq_0\omega}{4\pi}\right)^2\frac{1}{r\varepsilon_0}\mathrm{sen}^2\theta g(r,t)\,h(r,t),$$

cuja integral sobre uma superfície esférica de raio R é dada por

$$R^2\oint_{\Omega=4\pi}d\Omega\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S} = -\left(\frac{lq_0\omega}{4\pi}\right)^2\frac{2\pi}{\varepsilon_0}Rg(R,t)\,h(R,t)\int_0^\pi d\theta\,\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}^2\theta.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi d\theta\,\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}^2\theta &= \int_0^\pi d\theta\,\mathrm{sen}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\\ &= \int_0^\pi d\theta\,\mathrm{sen}\theta-\int_0^\pi d\theta\,\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta\\ &= 2-\frac{2}{3}\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Então,

$$R^2\oint_{\Omega=4\pi}d\Omega\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S} = -\left(\frac{lq_0\omega}{4\pi}\right)^2\frac{8\pi}{3\varepsilon_0}Rg(R,t)\,h(R,t).$$

Quando a superfície esférica tiver o raio muito grande, teremos o resultado

$$R^2\oint_{\Omega=4\pi}d\Omega\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S} \approx \left(\frac{lq_0\omega}{4\pi}\right)^2\frac{8\pi}{3\varepsilon_0}\frac{\omega^2}{c^3}\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right].$$

Como a corrente é dada por

$$\begin{aligned}I(t) &= \frac{dq(t)}{dt}\\ &= -q_0\omega\mathrm{sen}(\omega t),\end{aligned}$$

definimos a amplitude da corrente como

$$I_0 = -q_0\omega.$$

Assim,

$$R^2 \oint_{\Omega=4\pi} d\Omega\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S} \approx \frac{(lI_0)^2}{6\pi\varepsilon_0} \frac{\omega^2}{c^3} \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right].$$

Em média, a potência irradiada é, portanto, dada por

$$\langle P \rangle = \frac{l^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{I_0^2}{2}.$$

Convencionalmente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{l^2\omega^2\mu_0}{6\pi c} \frac{I_0^2}{2} \\
&= \frac{l^2\omega^2}{6\pi} \mu_0 \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \frac{I_0^2}{2} \\
&= \frac{l^2 (2\pi)^2}{6\pi T^2} \mu_0 \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \frac{I_0^2}{2} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{lc}{\lambda}\right)^2 \mu_0 \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \frac{I_0^2}{2} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \mu_0 \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \frac{I_0^2}{2} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I_0^2}{2}.
\end{aligned}$$

Como uma resistência R sendo atravessada por uma corrente $I_0 \mathrm{sen}\,(\omega t)$ dissipa uma potência média

$$R\frac{I_0^2}{2},$$

definimos a resistência de radiação de um dipolo como

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).