Campos de radiação para antena dipolar

Atalho para o entendimento

Reginaldo

nerdyard.com

18 de outubro de 2016

Começado do potencial vetorial aproximado

Vamos começar pelo potencial vetorial para o dipolo oscilante da postagem em Nerdyard (há também um vídeo sobre isso):
http://nerdyard.com/a-radiacao-de-um-dipolo-oscilante/ :

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) \approx \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r} lI\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

onde, como na postagem, estamos considerando

$$r \gg l$$

e

$$\frac{l}{2} \ll cT = \lambda,$$

que é equivalente a dizer que a velocidade das cargas é muito menor do que c.

Campos de radiação

O objetivo aqui é encontrar somente os campos de radiação, isto é, os campos que vão se propagar para longe da antena e, portanto, eventualmente atravessarão uma grande superfície esférica, não importando quão longe ela esteja da antena. Como a potencia irradiada é a grandeza que nos interessa, temos que calcular:

$$P \equiv r^2 \oint_{\Omega=4\pi} d\Omega\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S},$$

com r muito grande comparado com o tamanho da antena; só não o tomamos infinito para evitar ter que esperar uma eternidade até a radiação chegar lá.
Logo, procuramos as contribuições dos campos proporcionais a $1/r$ para que, em $\mathbf{S}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ contribuam, cada um, com um fator $1/r$ para cancelar o fator r^2 que multiplica a integral acima. Queremos:

$$\mathbf{E}^{\text{rad}} \propto \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{\text{rad}} \propto \frac{1}{r}.$$

O potencial escalar de radiação

Veja que a expressão do potencial vetorial já satisfaz a aproximação para os campos de radiação:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r} l I\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

isto é, já é proporcional a $1/r$ apenas.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} \approx -c^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r} l I\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]$$

e, portanto,

$$\frac{\partial \phi^{\mathrm{rad}}}{\partial t} = \frac{\mu_0 l c^2}{4\pi r c}\left(\frac{z}{r}\right)\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}.$$

Logo,

$$\phi^{\mathrm{rad}} = \frac{\mu_0 l c^2}{4\pi r c}\left(\frac{z}{r}\right) I\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

O campo de indução magnética de radiação

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \approx \boldsymbol{\nabla}\times\left[\hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r} l I\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \\
&= -\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\mu_0}{4\pi r} l I\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\mathbf{B}^{\mathrm{rad}} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} l\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\nabla} I\left(t-\frac{r}{c}\right),
$$

isto é,

$$
\mathbf{B}^{\mathrm{rad}} = \frac{\mu_0 l}{4\pi r c}\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}.
$$

O campo elétrico de radiação

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0}{4\pi r} l I\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\phi^{\text{rad}} &= \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\mu_0 l c^2}{4\pi r c}\left(\frac{z}{r}\right) I\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \\
&\approx \frac{\mu_0 l c^2}{4\pi r c}\left(\frac{z}{r}\right)\boldsymbol{\nabla} I\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{\mu_0 l c^2}{4\pi r c}\left(\frac{z}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial r} \\
&= -\frac{\mu_0 l c^2}{4\pi r c^2}\left(\frac{z}{r}\right)\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{E}^{\text{rad}} = -\boldsymbol{\nabla}\phi^{\text{rad}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 l}{4\pi r}\left(\frac{z}{r}\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}\right)\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}.$$

O vetor de Poynting de radiação

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^{\text{rad}} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}^{\text{rad}} \times \mathbf{B}^{\text{rad}} \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\left(\frac{z}{r}\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}\right)\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right] \times \left[\frac{\mu_0 l}{4\pi r c}\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]
\end{aligned}
$$

e, então, seguindo as sugestões de meus estudantes Pedro Consoli e Gabriel Magno,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^{\text{rad}} &= \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\right)^2\left[\frac{z}{r}\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) - \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})\right]\left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\right)^2\left[\frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}} - \frac{z}{r}\hat{\mathbf{r}}\left(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) - \hat{\mathbf{z}}\left(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) + \hat{\mathbf{r}}\right]\left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Fluxo de energia por unidade de tempo e área da esfera distante

Queremos:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}^{\mathrm{rad}} &= \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\right)^2\left[\frac{z}{r}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right)-\frac{z}{r}\left(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)-\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)+1\right]\left[\frac{\partial I\left(t-\right.}{\partial t}\right. \\
&= \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\right)^2\left[1-\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\right]\left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Como

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\mathrm{sen}\theta\cos\varphi+\hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\varphi+\hat{\mathbf{z}}\cos\theta,$$

segue que

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}^{\mathrm{rad}} = \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\mu_0 c}\left(\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\right)^2\left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2.$$

Potência irradiada

$$
\begin{aligned}
P &= r^2 \oint_{\Omega=4\pi} d\Omega\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{rad}} \\
&= r^2 \oint_{\Omega=4\pi} d\Omega\, \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 l}{4\pi r}\right)^2 \left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2 \\
&= \frac{2\pi}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 l}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2 \int_0^{\pi} d\theta\, \mathrm{sen}\theta \mathrm{sen}^2\theta
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{8\pi}{3\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 l}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2 = \frac{\mu_0 l^2}{6\pi c} \left[\frac{\partial I\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2 \\
&= \frac{\mu_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} l^2}{6\pi} \left[I_0 \frac{\partial \mathrm{sen}\left(\omega t - \omega \frac{r}{c}\right)}{\partial t}\right]^2 .
\end{aligned}
$$

Potência média da radiação

$$
\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{\mu_0 l^2}{6\pi c} I_0^2 \omega^2 \left\langle \cos^2\left(\omega t - \omega \frac{r}{c}\right)\right\rangle = \frac{\mu_0 l^2}{6\pi c}\left(\frac{I_0^2}{2}\right)\omega^2 \\
&= \frac{\mu_0 l^2}{6\pi c}\left(\frac{I_0^2}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{\lambda}c\right)^2 = \frac{4\pi^2 \mu_0 c^2}{6\pi c}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I_0^2}{2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} c\mu_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I_0^2}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I_0^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\langle P \rangle = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2\left(\frac{I_0^2}{2}\right).
$$