Uma antena de meia onda

Na postagem A radiação de um dipolo oscilante apresentamos uma antena dipolar na aproximação em que seu comprimento é muito menor do que o comprimento de onda irradiada. Aqui utilizamos os resultados daquela postagem para calcular a radiação emitida por uma antena dipolar cujo comprimento é meio comprimento de onda, ou seja, uma antena de meia onda. O truque nesse cálculo é superpor os campos de cada elemento da antena, utilizando os resultados anteriores, já que cada elemento é muito menor do que o comprimento de onda da radiação emitida. Assim, consideremos um fio ao longo do eixo z, estendendo-se de $-\lambda/4$ a $+\lambda/4$. Também suponhamos que a corrente ao longo do fio, como função do tempo e do espaço, seja

$$I\left(z',t\right) = I_0 \operatorname{sen}\left(\omega t\right)\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right),$$

de forma a ser nula nas extremidades do fio. Em outra postagem mostrarei como é possível justificar essa expressão para a corrente ao longo do fio, usando a teoria para linhas de transmissão.

Para um elemento do fio de comprimento dz', o campo $d\mathbf{B}$ só tem componente $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ e é dado por

$$d\mathbf{B} \approx \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0\omega}{rc}\operatorname{sen}\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz',$$

onde fizemos as substituições $\mathbf{B}\to d\mathbf{B}$, $l\to dz'$ e $-q_0\omega\to I_0\cos\left(2\pi z'/\lambda\right)$ na equação para o campo $\mathbf{B}$ da postagem A radiação de um dipolo oscilante e desprezamos o termo proporcional ao inverso de r^2. Para a radiação que atravessa a superfície de uma esfera de raio

$$R \gg \lambda$$

apenas a componente do campo elétrico na direção do versor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ contribui. Assim, analogamente à expressão obtida acima,

$$dE_\theta \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0\omega}{rc^2}\operatorname{sen}\theta\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz'.$$

Diferentemente do que é feito no livro-texto da Bibliografia citada abaixo, aqui estamos considerando r como sendo a distância desde o elemento dz', localizado em $(0,0,z')$, até a superfície da esfera de raio R, centrada na origem. Sendo assim,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2+z'^2-2Rz'\cos\theta} \\ &\approx R-z'\cos\theta. \end{aligned}$$

Notemos que no livro-texto da Bibliografia abaixo nossos símbolos r e R são escritos, respectivamente, R e r. Para calcularmos o vetor de Poynting, vamos integrar as expressões acima e, em ambas, aparece a integral

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz' \\ &\approx \frac{1}{R}\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R-z'\cos\theta}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz' \\ &= \frac{1}{R}\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)+\frac{\omega}{c}z'\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz' \\ &= \frac{1}{R}\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)+\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz'. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)+\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right] &= \cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right] \\ &- \operatorname{sen}\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right], \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{R}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz' \\
&- \frac{1}{R}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz' \\
&= \frac{1}{R}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz',
\end{aligned}$$

pois a integral sobre o seno se anula no intervalo simétrico, já que o seno é uma função ímpar. Simplifiquemos o integrando:

$$\begin{aligned}
\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) &= \frac{1}{2}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}(\cos\theta-1)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}(\cos\theta+1)\right].
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}\cos\theta\right]\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz' \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}(\cos\theta-1)\right]dz' \\
&+ \frac{1}{2}\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left[\frac{2\pi z'}{\lambda}(\cos\theta+1)\right]dz' \\
&= \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\cos\theta-1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta-\frac{\pi}{2}\right) \\
&+ \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{\cos\theta+1}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{I} = \frac{\lambda}{\pi R\mathrm{sen}^2\theta}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &\approx \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0\omega}{c}\frac{\lambda}{\pi R\mathrm{sen}\theta}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\
&= \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_0}{R\mathrm{sen}\theta}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E_\theta &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{I_0\omega}{c^2}\frac{\lambda}{\pi R\mathrm{sen}\theta}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{I_0}{Rc\mathrm{sen}\theta}\cos\left[\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

Com isso, a média temporal do vetor de Poynting é dada por

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{S}\rangle &\approx \hat{\mathbf{r}}\frac{1}{8\pi^2 c\varepsilon_0}\frac{I_0^2}{R^2\mathrm{sen}^2\theta}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \\
&= \hat{\mathbf{r}}\frac{1}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{I_0^2}{R^2\mathrm{sen}^2\theta}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right).
\end{aligned}$$

A potência média total dissipada é dada por:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} I_0^2 \int_0^\pi d\theta \, \frac{1}{\mathrm{sen}\theta} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right),$$

que deve ser integrada numericamente. Usando, por exemplo, o programa Maple, o resultado dá

$$\int_0^\pi d\theta \, \frac{1}{\mathrm{sen}\theta} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \approx 1.218826697.$$

Usando

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{Ns}^2/\mathrm{C}^2$$

e

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\left(\mathrm{Nm}^2\right),$$

obtemos

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 376.7343092\mathrm{Nms/C}^2.$$

Para relacionar com ohms, notemos que

$$\begin{aligned} 1\mathrm{ohm} &= 1\frac{\mathrm{volt}}{\mathrm{ampère}} \\ &= \frac{\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}} \\ &= \frac{\mathrm{Nms}}{\mathrm{C}^2}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\langle P \rangle \approx \left(\frac{376.7343092 \times 1.218826697}{2\pi}\mathrm{ohms}\right)\frac{I_0^2}{2},$$

ou seja,

$$\langle P \rangle \approx (73.07978534\mathrm{ohms})\frac{I_0^2}{2}$$

no vácuo.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).