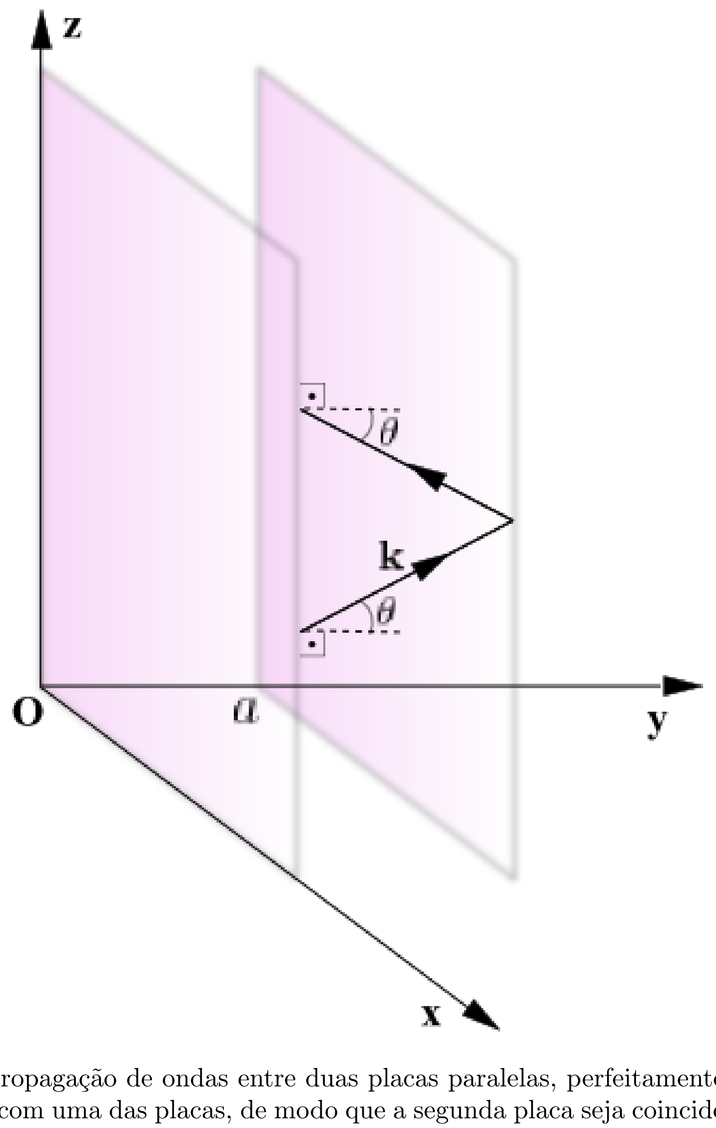
A propagação de ondas entre duas placas condutoras paralelas

Ondas eletromagnéticas planas, propagando-se irrestritamente em meios dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos, quando em regiões sem cargas ou correntes livres, têm os campos elétrico e indução magnética ortogonais entre si e com relação ao vetor de onda. Veja que estou afirmando que a propagação é livre de restrições, isto é, o meio é infinitamente extenso e nada há que impeça as ondas de preencherem todo o espaço infinito ocupado pelo dielétrico. É claro que isso é uma abstração; as ondas eletromagnéticas sempre são superposições de ondas planas e, portanto, formam um pacote de ondas localizado espacialmente. Ondas planas são apenas aproximações. Porém, sempre podemos olhar para cada uma das ondas monocromáticas planas que compõem o pacote de ondas e inferir, do comportamento de cada uma, o que acontece com a distribuição total que define a luz incidente na região de nosso interesse.

Nesta postagem vamos investigar os efeitos causados quando restringimos o espaço disponível à propagação de ondas eletromagnéticas. Para fazer isso, vamos considerar duas placas condutoras planas e paralelas e vamos averiguar as condições para que haja propagação de uma onda eletromagnética entre as placas. Assim, estaremos deduzindo as consequências de restringir a propagação apenas em uma dimensão.



Consideremos a propagação de ondas entre duas placas paralelas, perfeitamente condutoras. Escolhamos o plano xz coincidente com uma das placas, de modo que a segunda placa seja coincidente com o plano de equação $y = a > 0$. Em virtude de reflexões pelas superfícies condutoras, uma onda propagando-se entre as placas deve ser composta por ondas planas com vetores de onda no mesmo plano. Seja yz esse plano. Assim, um ansatz para esse problema pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\epsilon} \quad = \quad \hat{\mathbf{x}} \left\{ E_1 \exp\left[ik\left(y\cos\theta + z\,\mathrm{sen}\theta\right) - i\omega t\right] + E_1' \exp\left[ik\left(-y\cos\theta + z\,\mathrm{sen}\theta\right) - i\omega t\right]\right\}$$

Como devemos ter a componente tangencial do campo elétrico contínua e, em condutores ideais o campo elétrico deve ser nulo, concluímos que, para $y = 0$,

$$E_1' = -E_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= \hat{\mathbf{x}} E_1 \left\{ \exp\left[ik\left(y\cos\theta + z\mathrm{sen}\theta\right) - i\omega t\right] - \exp\left[ik\left(-y\cos\theta + z\mathrm{sen}\theta\right) - i\omega t\right]\right\} \\ &= \hat{\mathbf{x}} E_0 \mathrm{sen}\left(ky\cos\theta\right)\exp\left(ikz\mathrm{sen}\theta - i\omega t\right),\end{aligned}$$

onde tomamos

$$E_0 = 2iE_1.$$

Mas, em $y = a$, o campo elétrico também deve ser nulo, implicando que

$$ka\cos\theta = n\pi, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

O resultado acima mostra que a limitação do espaço disponível para que a onda se propague implica em uma restrição aos valores possíveis de $k\cos\theta$. Assim, não é qualquer onda que se propaga entre as placas. Como exemplo desse detalhe, tentemos modificar a onda que está sendo propagada com um certo n. O campo elétrico, nesse caso, é escrito como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}} E_0 \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\exp\left(iz\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} - i\omega t\right),$$

pois,

$$\begin{aligned}k\mathrm{sen}\theta &= \sqrt{k^2 - \left(k\cos\theta\right)^2} \\ &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}.\end{aligned}$$

Caso tomemos $k < n\pi/a$, teremos evanescência da propagação ao longo do eixo z. Isso significa que há um limite de comprimento de onda que permite propagação entre as placas para cada modo n, isto é, o comprimento de onda de corte é dado por

$$\begin{aligned}k_c &= \frac{2\pi}{\lambda_c} \\ &= \frac{n\pi}{a}.\end{aligned}$$

Para haver propagação, k deve ser maior do que k_c, ou seja, o comprimento de onda deve ser menor do que λ_c.

Além da restrição sobre a possibilidade de propagação entre as placas paralelas, outra consequência da limitação espacial de ondas eletromagéticas é a perda do caráter transversal. Para esclarecer esse ponto, calculemos o campo $\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= -\frac{i}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon} \\ &= \frac{i}{\omega}E_0\hat{\mathbf{x}}\times\boldsymbol{\nabla}\left[\mathrm{sen}\left(ky\cos\theta\right)\exp\left(ikz\mathrm{sen}\theta - i\omega t\right)\right] \\ &= \left[\hat{\mathbf{y}}E_0\frac{k\mathrm{sen}\theta}{\omega}\mathrm{sen}\left(ky\cos\theta\right) + \hat{\mathbf{z}}iE_0\frac{k\cos\theta}{\omega}\cos\left(ky\cos\theta\right)\right]\exp\left(ikz\mathrm{sen}\theta - i\omega t\right).\end{aligned}$$

Notemos que, embora $\boldsymbol{\beta}$ seja ortogonal a $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\beta}$ não é ortogonal aos vetores de onda:

$$\begin{aligned}k\left(\pm\hat{\mathbf{y}}\cos\theta + \hat{\mathbf{z}}\mathrm{sen}\theta\right)\cdot\boldsymbol{\beta} &= \pm E_0\frac{k\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\omega}\mathrm{sen}\left(ky\cos\theta\right)\exp\left(ikz\mathrm{sen}\theta - i\omega t\right) \\ &+ iE_0\frac{k\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\omega}\cos\left(ky\cos\theta\right)\exp\left(ikz\mathrm{sen}\theta - i\omega t\right) \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Mesmo a parte real dessa expressão é não nula. Como o campo elétrico, nesse caso, é transversal, os modos que estamos estudando são chamados de modos transversais elétricos, TE. Poderíamos ter começado com um ansatz em que $\boldsymbol{\beta}$ fosse transversal; então, o $\boldsymbol{\epsilon}$ correspondente não seria transversal e os modos seriam chamados de modos transversais magnéticos, TM.

A velocidade de fase de uma onda entre as placas é obtida considerando o fator $\exp(ikz\text{sen}\theta - i\omega t)$, ou seja, a velocidade de fase é dada por

$$v_f = \frac{\omega}{k\text{sen}\theta}.$$

Se o meio entre as placas for o vácuo, então

$$v_f = \frac{c}{\text{sen}\theta},$$

onde

$$c = \frac{\omega}{k}$$

é a velocidade da luz no vácuo. Assim, a velocidade de fase é maior do que a velocidade da luz no vácuo. No entanto, não há violação do princípio da relatividade porque a energia continua tendo velocidade de transmissão menor do que c. Para mostrarmos isso, calculemos esta velocidade usando a relação

$$\mathbf{v}_g = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{\langle u \rangle}.$$

A média do vetor de Poynting é dada por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*\right).$$

Temos, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^* = |E_0|^2 \text{sen}\left(ky\cos\theta\right)\left[\hat{\mathbf{z}}\frac{k\text{sen}\theta}{\omega}\text{sen}\left(ky\cos\theta\right) + \hat{\mathbf{y}}i\frac{k\cos\theta}{\omega}\cos\left(ky\cos\theta\right)\right].$$

Logo,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{2\mu_0}|E_0|^2 \frac{k\text{sen}\theta}{\omega}\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right).$$

Também temos

$$\begin{aligned}
\langle u \rangle &= \frac{\varepsilon_0}{4}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{4\mu_0}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^* \\
&= \frac{\varepsilon_0}{4}|E_0|^2\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) \\
&+ \frac{|E_0|^2}{4\mu_0}\left[\left(\frac{k\text{sen}\theta}{\omega}\right)^2\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) + \left(\frac{k\cos\theta}{\omega}\right)^2\cos^2\left(ky\cos\theta\right)\right] \\
&= \frac{|E_0|^2}{4\mu_0 c^2}\left[\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) + \text{sen}^2\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) + \cos^2\theta\cos^2\left(ky\cos\theta\right)\right] \\
&= \frac{|E_0|^2}{4\mu_0 c^2}\left[2\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) + \cos^2\theta\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_g &= \frac{k\text{sen}\theta}{\omega}\frac{2\hat{\mathbf{z}}c^2\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right)}{\left[2\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) + \cos^2\theta\right]} \\
&= \frac{2\text{sen}\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right)}{2\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) + \cos^2\theta}\hat{\mathbf{z}}c.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que $|\mathbf{v}_g| \leqslant c$, neguemos esta tese e procuremos por uma contradição. Tomemos como hipótese, portanto, que $|\mathbf{v}_g| > c$, ou seja,

$$\frac{2\left|\text{sen}\theta\right| \text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right)}{2\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right)+\cos^2\theta} \quad > \quad 1.$$

Assim,

$$2\left|\text{sen}\theta\right| \text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) \quad > \quad 2\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right)+\cos^2\theta,$$

ou ainda,

$$2\left|\text{sen}\theta\right|\left(1-\left|\text{sen}\theta\right|\right) \text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) \quad > \quad \cos^2\theta,$$

isto é,

$$\text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right) \quad > \quad \frac{\cos^2\theta}{2\left|\text{sen}\theta\right|\left(1-\left|\text{sen}\theta\right|\right)}.$$

Como

$$1 \quad > \quad \text{sen}^2\left(ky\cos\theta\right),$$

segue que

$$2\left|\text{sen}\theta\right|\left(1-\left|\text{sen}\theta\right|\right) \quad > \quad \cos^2\theta,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 2\left|\text{sen}\theta\right| \quad &> \quad 2\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta \\ &= \quad \text{sen}^2\theta+1. \end{aligned}$$

Essa desigualdade ainda pode ser reescrita como

$$0 \quad > \quad \text{sen}^2\theta-2\left|\text{sen}\theta\right|+1,$$

isto é,

$$\left(1-\left|\text{sen}\theta\right|\right)^2 \quad < \quad 0,$$

que é uma contradição. Consequentemente,

$$|\mathbf{v}_g| \quad \leqslant \quad c$$

e não há violação do princípio da relatividade: nenhum sinal está sendo enviado com velocidade superior à da luz.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).