Uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo

Atalho para o entendimento

Reginaldo

nerdyard.com

25 de setembro de 2016

O problema

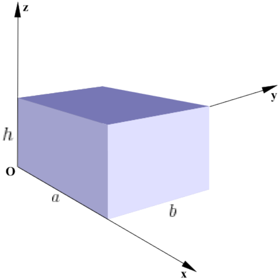

Figure: Uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo.

Encontrar ondas estacionárias monocromáticas que possam permanecer no interior de uma cavidade de paredes condutoras ideais.

TE ou TM?

A primeira providência é decidir qual o tipo de modos calcular primeiro: TE, modos transversais elétricos, ou TM, modos transversais magnéticos Aqui, como exemplo, vamos calcular modos TE.

Comece pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial t^2} = 0.$$

Só precisamos de β_z, pois estamos considerando modos TE e, portanto, $\epsilon_z = 0$. As outras componentes são obtidas a partir de β_z.
Dependência temporal: $\beta_z \sim \exp(-i\omega t)$, ondas monocromáticas:

$$\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\beta_z = 0.$$

Ansatz: ondas estacionárias nas três direções espaciais

Ansatz: $\beta_z \sim \zeta_1 \cos\left(k_z z\right) + \zeta_2 \mathrm{sen}\left(k_z z\right)$, pois também temos confinamento na direção do eixo z :

$$\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\beta_z = 0.$$

E ao longo dos eixos transversais, x e y?

Ondas estacionárias nas direções transversais também

A cavidade que estamos estudando é só um guia de ondas com tampas transversais. Para modos TE, a postagem http://nerdyard.com/um-guia-de-ondas-de-secao-transversal-retangular-constante/
fornece:

$$\beta_z = \beta_0 \exp\left(ik_z z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right),$$

com

$$n_x, n_y = 0, 1, 2, \ldots, \text{ mas com } n_x^2 + n_y^2 \neq 0.$$

Mas, aqui, só temos que trocar a dependência com z :

$$\beta_z = \exp\left(-i\omega t\right) \left[\zeta_1 \cos\left(k_z z\right) + \zeta_2 \mathrm{sen}\left(k_z z\right)\right] \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right).$$

Condições de contorno

As componentes normais de $\boldsymbol{\beta}$ nas superfícies laterais devem ser contínuas e, portanto, devem se anular nas superfícies laterais, isto é, em $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ e $y = b$. Mas essas condições já estão satisfeitas pelo nosso uso da dependência com x e y do problema do guia de ondas. Agora, precisamos impor que a componente normal de $\boldsymbol{\beta}$ seja contínua também nas tampas, em $z = 0$ e $z = h$. Logo, devemos impor:

$$\beta_z\big|_{z=0} = \beta_z\big|_{z=h} \;\; = \;\; 0,$$

já que β_z é a componente normal nas tampas. Consequentemente,

$$\zeta_1 \;\; = \;\; 0 \text{ e } k_z = \frac{n_z \pi}{h}, \text{ com } n_z = 1, 2, 3, \ldots$$

Note que $n_z \neq 0$, pois estamos interessados só nas soluções não triviais.

Componente longitudinal de $\boldsymbol{\beta}$

Escrevemos então a solução para a componente longitudinal de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\beta_z = \beta_0 \exp\left(-i\omega t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h} z\right) \cos\left(\frac{n_x\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y\pi}{b} y\right),$$

com $n_z = 1, 2, 3, \ldots$ onde tomamos $\beta_0 = \zeta_2$.

Componentes transversais de β

Para o caso do guia de ondas, quando temos propagação ao longo do eixo z, calculamos as componentes transversais assim:

$$\beta_x = -\frac{ik_z}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \beta_z}{\partial x} = -\frac{k_z}{\omega}\epsilon_y$$

e

$$\beta_y = -\frac{ik_z}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \beta_z}{\partial y} = \frac{k_z}{\omega}\epsilon_x.$$

Mas agora, com onda estacionária ao longo do eixo z, precisamos de um truque para poder usar essas mesmas expressões.

Componentes transversais de $\boldsymbol{\beta}$

Olhando só para a dependência com z e t de β_z, vemos que:

$$\begin{aligned}\exp\left(-i\omega t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right) &= \exp\left(-i\omega t\right)\operatorname{sen}\left(k_z z\right)\\ &= \exp\left(-i\omega t\right)\frac{\exp\left(ik_z z\right)-\exp\left(-ik_z z\right)}{2i},\end{aligned}$$

isto é, a superposição de duas ondas propagantes, uma ao longo do sentido de $\hat{\mathrm{z}}$ e outra ao longo do sentido de $-\hat{\mathrm{z}}$:

$$\exp\left(-i\omega t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right) = \frac{1}{2i}\exp\left(ik_z z-i\omega t\right)-\frac{1}{2i}\exp\left(-ik_z z-i\omega t\right),$$

uma com k_z, como no problema do guia, e outra com $-k_z$, bastando trocar k_z por $-k_z$ nas fórmulas do guia e fazendo a correspondente superposição.

Componentes transversais de $\boldsymbol{\beta}$

Então, vamos escrever:

$$\beta_z = \beta_z^{(+)} + \beta_z^{(-)},$$

com

$$\beta_z^{(+)} \equiv \frac{\beta_0}{2i} \exp\left(i\frac{n_z\pi}{h}z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)$$

e

$$\beta_z^{(-)} \equiv -\frac{\beta_0}{2i} \exp\left(-i\frac{n_z\pi}{h}z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right),$$

onde já substituímos

$$k_z = \frac{n_z\pi}{h}, \text{ com } n_z = 1, 2, 3, \ldots$$

Componentes transversais de $\boldsymbol{\beta}$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\beta_x &= -\frac{ik_z}{k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial\beta_z^{(+)}}{\partial x}+\frac{ik_z}{k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial\beta_z^{(-)}}{\partial x}\\
&= \frac{-\beta_0 n_x n_z \pi^2 \exp\left(-i\omega t\right)}{ah\left[\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2\right]}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\beta_y &= -\frac{ik_z}{k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial\beta_z^{(+)}}{\partial y}+\frac{ik_z}{k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial\beta_z^{(-)}}{\partial y}\\
&= \frac{-\beta_0 n_y n_z \pi^2 \exp\left(-i\omega t\right)}{bh\left[\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2\right]}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right).
\end{aligned}
$$

As componentes ϵ_x e ϵ_y

É evidente que temos:

$$\beta_x^{(\pm)} = \mp \frac{k_z}{\omega} \epsilon_y^{(\pm)}$$

e

$$\beta_y^{(\pm)} = \pm \frac{k_z}{\omega} \epsilon_x^{(\pm)}.$$

Então,

$$\epsilon_x = \epsilon_x^{(+)} + \epsilon_x^{(-)} = \frac{\omega}{k_z} \left(\beta_y^{(+)} - \beta_y^{(-)} \right)$$

e

$$\epsilon_y = \epsilon_y^{(+)} + \epsilon_y^{(-)} = \frac{\omega}{k_z} \left(-\beta_x^{(+)} + \beta_x^{(-)} \right).$$

As componentes ϵ_x e ϵ_y

Substituindo,

$$\epsilon_x = \frac{-i\beta_0\omega n_y\pi\exp\left(-i\omega t\right)}{b\left[\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2\right]}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)$$

e

$$\epsilon_y = \frac{i\beta_0\omega n_x\pi\exp\left(-i\omega t\right)}{a\left[\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2\right]}\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right).$$

Modos TE_{n_x,n_y,n_z}

Assim, obtemos os chamados modos TE_{n_x,n_y,n_z} para a cavidade. Veja que só podemos ter as seguintes frequências para soluções não nulas:

$$\omega_{n_x,n_y,n_z} = c\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2},$$

com $n_x, n_y = 0, 1, 2, \ldots$ e $n_z = 1, 2, 3, \ldots$, mas com $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$.
Como você obteria os modos TM?