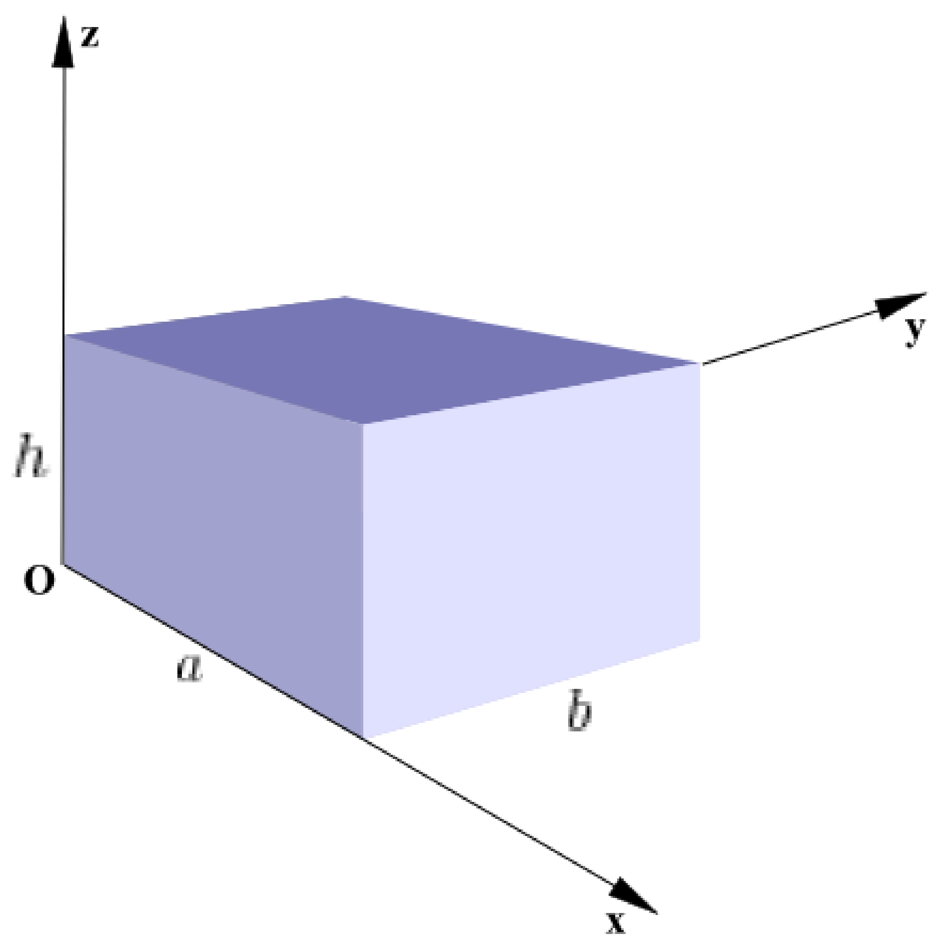
Uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo

Em postagens anteriores, A propagação de ondas entre duas placas condutoras paralelas e Um guia de ondas de seção transversal retangular constante, consideramos o que se passa quando confinamos ondas eletromagnéticas em uma e, depois, em duas dimensões, respectivamente. Em ambos os casos, as ondas eletromagnéticas podem se propagar ao longo das direções que não foram restringidas. Agora, nesta postagem, vamos considerar o que acontece quando temos uma caixa fechada, em forma de paralelepípido, com suas superfícies internas feitas de material condutor ideal. Uma tal região do espaço é conhecida como uma cavidade ressonante. Vamos ver que, obviamente, não há como ter ondas propagantes, já que todas as direções do espaço são delimitadas por condutores. No entanto, ainda assim podem formar-se ondas estacionárias para certas frequências determinadas pela geometria interna da cavidade. Essas frequências são chamadas frequências de ressonância da cavidade ressonante. Vamos analisar o exemplo de uma cavidade em forma de paralelepípedo para simplificar os cálculos, mas há cavidades ressonantes das mais variadas formas.

Quando há condutividade finita nas paredes internas da cavidade, o campo eletromagnético no seu interior acaba sendo gradativamente absorvido pelo material da cavidade, isto é, a energia eletromagnética armazenada na cavidade é dissipada por efeito Joule nas paredes condutoras. Quanto maior a condutividade, menor a absorção da energia eletromagnética pelas paredes. Por essa razão, dizemos que uma cavidade de maior condutividade tem uma melhor qualidade e que o chamado fator de qualidade, Q, é alto. O fator de qualidade mede, essencialmente, a razão entre a energia armazenada na cavidade e a energia perdida por ciclo, na frequência de ressonância daquela energia armazenada (supondo campos aproximadamente monocromáticos). Mas, aqui, como não trataremos o caso dissipativo, não vamos nos deter com a definição exata do fator de qualidade.



Consideremos uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo, escavada em um material condutor ideal. Seja o paralelepípedo que dá forma à cavidade definido pelos seguintes vértices: $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(a, b, 0)$,

$(0,b,0)$, $(0,b,h)$, $(0,0,h)$, $(a,0,h)$ e (a,b,h). Nesse caso, as ondas no interior da cavidade não são propagantes; são estacionárias. Tomemos uma dependência temporal dada por $\exp(-i\omega t)$ e tentemos o ansatz:

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= E_1 f_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t),\\
\epsilon_y &= E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) f_2(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t),\\
\epsilon_z &= E_3 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right) f_3(z)\exp(-i\omega t),
\end{aligned}$$

para $n_x, n_y, n_z = 0,1,2,3,\ldots$, pois, como as paredes da cavidade são idealmente condutoras e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, ϵ_x deve se anular para $y=0$, $y=b$, $z=0$ e $z=h$, ϵ_y deve se anular para $x=0$, $x=a$, $z=0$ e $z=h$ e ϵ_z deve se anular para $x=0$, $x=a$, $y=0$ e $y=b$. Supomos E_1, E_2 e E_3 reais por simplicidade e devemos encontrar as funções f_1, f_2 e f_3. Como no interior da cavidade não há cargas por hipótese, a divergência do campo elétrico deve ser nula e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\epsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\epsilon_y}{\partial y}+\frac{\partial\epsilon_z}{\partial z} &= E_1\frac{df_1(x)}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t)\\
&+ E_2\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\frac{df_2(y)}{dy}\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t)\\
&+ E_3\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\frac{df_3(z)}{dz}\exp(-i\omega t)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Essa igualdade deve ser verdadeira para todo valor de n_x, n_y, n_z, x, y e z. Tomando um caso em que n_x, n_y, n_z, x, y e z são não nulos e dividindo essa equação pelo produto $\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t)$, obtemos

$$\frac{E_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)}\frac{df_1(x)}{dx}+\frac{E_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)}\frac{df_2(y)}{dy}+\frac{E_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)}\frac{df_3(z)}{dz} = 0.$$

A única forma de satisfazer essa condição para todo ponto dentro da cavidade é escolhermos cada um dos termos acima igual a uma constante:

$$\begin{aligned}
\frac{E_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)}\frac{df_1(x)}{dx} &= C_1,\\
\frac{E_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)}\frac{df_2(y)}{dy} &= C_2,\\
\frac{E_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)}\frac{df_3(z)}{dz} &= C_3,
\end{aligned}$$

com

$$C_1+C_2+C_3 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= -\frac{C_1}{E_1}\frac{a}{n_x\pi}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right),\\
f_2(y) &= -\frac{C_2}{E_2}\frac{b}{n_y\pi}\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right),\\
f_3(z) &= -\frac{C_3}{E_3}\frac{h}{n_z\pi}\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right).
\end{aligned}$$

Notemos que poderíamos ter adicionado uma constante a cada uma das funções acima, mas o caso constante já está incluído se considerarmos n_x, n_y, n_z também assumindo o valor 0. Logo, a solução para este problema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= -C_1\frac{a}{n_x\pi}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t),\\
\epsilon_y &= -C_2\frac{b}{n_y\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t),\\
\epsilon_z &= -C_3\frac{h}{n_z\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp(-i\omega t),
\end{aligned}$$

com

$$C_1 + C_2 + C_3 \quad = \quad 0.$$

Essa solução, como está expressa, implica em ignorarmos os casos em que um dos n's é nulo. Para podermos incluir esses casos também, dada a arbitrariedade das constantes introduzidas acima, escolhemos

$$\begin{aligned}
E_{0x} &= -C_1 \frac{a}{n_x \pi}, \\
E_{0y} &= -C_2 \frac{b}{n_y \pi}, \\
E_{0z} &= -C_3 \frac{h}{n_z \pi}.
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= E_{0x} \cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right) \exp\left(-i\omega t\right), \\
\epsilon_y &= E_{0y} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right) \exp\left(-i\omega t\right), \\
\epsilon_z &= E_{0z} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right) \exp\left(-i\omega t\right),
\end{aligned}$$

com

$$E_{0x}\frac{n_x}{a} + E_{0y}\frac{n_y}{b} + E_{0z}\frac{n_z}{h} \quad = \quad 0$$

e $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \ldots$, exceto os casos em que pelo menos dois n's são nulos.

Agora, calculemos $\boldsymbol{\beta}$. Da lei de Faraday, temos:

$$\boldsymbol{\beta} \quad = \quad -\frac{i}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\beta_x &= -\frac{i}{\omega}\left[\frac{n_y\pi}{b}E_{0z}\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right. \\
&- \left.\frac{n_z\pi}{h}E_{0y}\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right] \\
&= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{n_y\pi}{b}E_{0z} - \frac{n_z\pi}{h}E_{0y}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_y &= -\frac{i}{\omega}\left[\frac{n_z\pi}{h}E_{0x}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right. \\
&- \left.\frac{n_x\pi}{a}E_{0z}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right] \\
&= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{n_z\pi}{h}E_{0x} - \frac{n_x\pi}{a}E_{0z}\right)\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta_z &= -\frac{i}{\omega}\left[\frac{n_x\pi}{a}E_{0y}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right. \\
&- \left.\frac{n_y\pi}{b}E_{0x}\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right)\right] \\
&= -\frac{i}{\omega}\left(\frac{n_x\pi}{a}E_{0y} - \frac{n_y\pi}{b}E_{0x}\right)\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n_z\pi}{h}z\right)\exp\left(-i\omega t\right).
\end{aligned}$$

Forma alternativa de tratar este problema

Este mesmo problema pode ser resolvido considerando as soluções para o guia de ondas da postagem Um guia de ondas de seção transversal retangular constante, mas com tampas nas extemidades. Assim, para os modos TE do guia de ondas temos

$$\beta_z \quad = \quad \beta_0 \exp\left(ik_z z - i\omega t\right)\cos\left(\frac{n_x\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{b}y\right),$$

que só não é trivial quando $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$. Para uma cavidade construída a partir desse guia, como há reflexão nas tampas, devemos considerar a superposição

$$\beta_z^{\text{cav}} = \beta_{z1} + \beta_{z2},$$

onde definimos

$$\beta_{z1} = \beta_1 \exp\left(ik_z z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)$$

e

$$\beta_{z2} = \beta_2 \exp\left(-ik_z z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)$$

Como os modos são, por hipótese, TE, temos $\epsilon_z^{\text{cav}} = 0$ e, da continuidade da componente tangencial do campo elétrico, também devemos impor $\epsilon_x^{\text{cav}} = \epsilon_y^{\text{cav}} = 0$ em $z = 0$ e $z = h$.

Mas, de acordo com a postagem Um guia de ondas de seção transversal retangular constante,

$$\begin{aligned}
\epsilon_x^{\text{cav}} &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z1}}{\partial y}\right) - \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z2}}{\partial y}\right) \\
&= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_y^{\text{cav}} &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z1}}{\partial x}\right) + \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z2}}{\partial x}\right) \\
&= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

de forma que devemos impor

$$\left[\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x}\right]_{z=0,h} = 0$$

e

$$\left[\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y}\right]_{z=0,h} = 0.$$

Aqui, c é a magnitude de propagação da luz no vácuo, isto é,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

No entanto, todos os resultados obtidos aqui também valem quando, dentro da cavidade, há um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, caracterizado pelas constantes μ e ε. Nesse caso, basta trocar c, nas equações desta postagem, pela velocidade de propagação no meio dielétrico, isto é,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

As derivadas de β_z^{cav} que precisamos são calculadas assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} &= -\frac{n_x \pi}{a} \beta_1 \exp\left(ik_z z - i\omega t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \\
&- \frac{n_x \pi}{a} \beta_2 \exp\left(-ik_z z - i\omega t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} &= -\frac{n_y \pi}{a} \beta_1 \exp\left(ik_z z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \\
&- \frac{n_y \pi}{a} \beta_2 \exp\left(-ik_z z - i\omega t\right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right).
\end{aligned}$$

Impondo as condições acima, concluímos que:

$$\beta_2 = -\beta_1$$

e

$$k_z = \frac{n_z \pi}{h}, \text{ para } n_z = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Logo, escolhendo

$$\beta_{0z} = 2i\beta_1,$$

obtemos

$$\beta_z^{\text{cav}} = \beta_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t\right)$$

e, para não termos solução trivial, devemos ter $n_z \neq 0$, isto é,

$$n_z = 1, 2, 3, \ldots.$$

Calculemos, portanto, o campo elétrico:

$$\begin{aligned}
\epsilon_x^{\text{cav}} &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y}\right) \\
&= \frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_y \pi}{b} \beta_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_y^{\text{cav}} &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_x \pi}{a} \beta_{0z} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp\left(-i\omega t\right).
\end{aligned}$$

Dessas equações verificamos que as amplitudes que calculamos anteriormente escrevem-se

$$E_{0x} = \frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_y \pi}{b} \beta_{0z}$$

e

$$E_{0y} = -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_x \pi}{a} \beta_{0z}.$$

Da relação que obtivemos anteriormente,

$$E_{0x} \frac{n_x}{a} + E_{0y} \frac{n_y}{b} + E_{0z} \frac{n_z}{h} = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
E_{0z} \frac{n_z}{h} &= -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{n_y \pi}{b} \frac{n_x}{a} - \frac{n_x \pi}{a} \frac{n_y}{b}\right) \beta_{0z} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa análise, concluímos que obtivemos modos TE, já que $n_z \neq 0$ e, portanto,

$$E_{0z} = 0.$$

Finalmente, notamos que as frequências possíveis são obtidas da equação de onda:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{n_x \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2.$$

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).