Ondas planas em meios condutores no sistema MKS

As ondas eletromagnéticas, além de se propagarem através do vácuo, também podem atravessar meios materiais como o ar e o vidro, que são meios dielétricos. Em todos os materiais, no entanto, parte da energia das ondas incidentes é absorvida pela matéria. Principalmente em materiais com condutividade apreciável, os chamados materiais condutores, as ondas eletromagnéticas são rapidamente absorvidas, penetrando apenas uma pequena camada no chamado efeito pelicular. Na presente postagem vamos usar a teoria eletromagnética de Maxwell para explicar esse comportamento como função da condutividade elétrica do material.

Em meios lineares, isotrópicos, homogêneos e ôhmicos com condutividade g, tanto no sistema CGS gaussiano de unidades como no MKS, temos,

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E},$$

onde cada grandeza deve ser expressa nas unidades do sistema correspondente. Nesta postagem vamos considerar que uma onda plana incida normalmente sobre uma interface entre um meio dielétrico e um meio condutor, adentrando o meio condutor. Para o presente objetivo, vamos apenas considerar a propagação da onda transmitida no interior do meio condutor. Supondo que a interface coincida com o plano xy e que o meio condutor tenha coordenadas $z > 0$, o vetor de onda no meio dielétrico tem o sentido do versor $\hat{\mathbf{z}}$. Considerando a isotropia dos dois meios, esperamos que a onda que penetra o meio condutor continue a se propagar ao longo do mesmo sentido e direção que a onda incidente, de modo que, dentro do material condutor, escrevemos

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}.$$

Com essa hipótese, adotamos o seguinte ansatz para os campos $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right)$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right),$$

onde ω é uma freqüência que supomos dada. Segue da lei da indução de Faraday que

$$k\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0 = \omega\boldsymbol{\beta}_0. \qquad (1)$$

Ao mesmo tempo, também segue da lei de Ampère & Maxwell que

$$ik\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\beta}_0 = \mu g\boldsymbol{\epsilon}_0 - i\mu\varepsilon\omega\boldsymbol{\epsilon}_0,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \frac{ik\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\beta}_0}{\mu\left(g - i\varepsilon\omega\right)}.$$

Logo,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0.$$

Assim, usando a Eq. (1) na expressão logo acima, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_0 &= \frac{ik^2\hat{\mathbf{z}} \times \left(\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0\right)}{\mu\omega\left(g - i\varepsilon\omega\right)} \\ &= \frac{ik^2\left(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 - \boldsymbol{\epsilon}_0\right)}{\mu\omega\left(g - i\varepsilon\omega\right)}.\end{aligned}$$

Temos, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = -\frac{ik^2\boldsymbol{\epsilon}_0}{\mu\omega\left(g - i\varepsilon\omega\right)},$$

ou seja,

$$ik^2 + \mu\omega\left(g - i\varepsilon\omega\right) = 0,$$

ou, simplificando,

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\omega g.$$

Logo, k é um número complexo e, como tal, podemos escrever

$$k = k_r + ik_i,$$

onde

$$k_r = \mathrm{Re}\,(k)$$

e

$$k_i = \mathrm{Im}\,(k)\,.$$

Escrevamos:

$$\begin{aligned} k^2 &= (k_r + ik_i)^2 \\ &= \left(k_r^2 - k_i^2\right) + 2ik_r k_i. \end{aligned}$$

Então, devemos ter

$$k_r^2 - k_i^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

e

$$2k_r k_i = \mu\omega g. \qquad (2)$$

Substituindo k_i da segunda dessas equações na primeira, resulta a equação

$$k_r^4 - \mu\varepsilon\omega^2 k_r^2 - \frac{(\mu\omega g)^2}{4} = 0.$$

A solução para essa equação é dada por

$$k_r^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{\left(\mu\varepsilon\omega^2\right)^2 + (\mu\omega g)^2}}{2},$$

já que $k_r^2 \geqslant 0$. Como estamos supondo que a onda transmitida se propaga na direção positiva do eixo z, obtemos

$$\begin{aligned} k_r &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{\left(\mu\varepsilon\omega^2\right)^2 + (\mu\omega g)^2}\right)} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Dessa solução para k_r e da Eq. (2) acima, obtemos

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{\mu\omega g}{2k_r} \\ &= \frac{\mu g}{\sqrt{2}\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}}} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1}. \end{aligned}$$

Notemos que a onda é evanescente, pois

$$\exp\left(ikz - i\omega t\right) = \exp\left(-k_i z\right)\exp\left(ik_r z - i\omega t\right),$$

com

$$k_i > 0$$

quando $g \neq 0$. Isso significa que uma onda eletromagnética penetra apenas até um certo ponto em um meio condutor, sendo que essa profundidade de penetração, chamada de "skin depth", é dada por

$$\delta = \frac{1}{k_i}.$$

O fluxo de energia médio no meio condutor é dado pelo vetor de Poynting médio:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*\right) \\
&= \frac{\exp\left(-2k_i z\right)}{2\mu\omega}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}_0 \times \left(k\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0\right)^*\right] \\
&= \frac{\exp\left(-2k_i z\right)}{2\mu\omega}\mathrm{Re}\left(k^*\hat{\mathbf{z}}\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*\right) \\
&= \frac{k_r \exp\left(-2k_i z\right)}{2\mu\omega}\hat{\mathbf{z}}\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Assim, a energia da onda diminui à medida que penetra no condutor. Também é interessante notarmos que se a condutividade for muito grande, a penetração será muito pequena e, portanto, para um condutor ideal, a onda incidente será totalmente refletida.

Também podemos calcular a densidade de energia eletromagnética média dentro do material condutor. Então,

$$\begin{aligned}
\langle u \rangle &= \frac{\varepsilon}{4}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{4\mu}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* \\
&= \frac{\varepsilon}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{1}{4\mu}\exp\left(-2k_i z\right)\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}_0^* \\
&= \frac{1}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\left[\varepsilon\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{kk^*}{\mu\omega^2}\left(\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0^*\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\left[\varepsilon + \frac{kk^*}{\mu\omega^2}\right]\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{1}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\left[\varepsilon + \frac{k_r^2 + k_i^2}{\mu\omega^2}\right]\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
k_r^2 + k_i^2 &= \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right] \\
&= \mu\varepsilon\omega^2\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle u \rangle &= \frac{1}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\left[\varepsilon + \frac{\mu\varepsilon\omega^2\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}}{\mu\omega^2}\right]\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{\varepsilon}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right]\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{\varepsilon}{4}\exp\left(-2k_i z\right)\frac{2k_r^2}{\mu\varepsilon\omega^2}\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{1}{2\mu}\exp\left(-2k_i z\right)\frac{k_r^2}{\omega^2}\boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}$$

Dessa expressão e da Eq. (3), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{k_r}{\omega}\langle\mathbf{S}\rangle &= \frac{k_r^2 \exp(-2k_i z)}{2\mu\omega^2}\hat{\mathbf{z}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{2\mu}\exp(-2k_i z)\,\frac{k_r^2}{\omega^2}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \hat{\mathbf{z}}\langle u\rangle\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \hat{\mathbf{z}}\frac{\omega}{k_r}\langle u\rangle\,.$$

Como a onda que se propaga no interior do condutor é proporcional à exponencial

$$\begin{aligned}
\exp(ikz - i\omega t) &= \exp(-k_i z)\exp(ik_r z - i\omega t) \\
&= \exp(-k_i z)\exp\left[ik_r\left(z - \frac{\omega}{k_r}t\right)\right],
\end{aligned}$$

vemos que a velocidade de propagação da onda no meio condutor, $\mathbf{v}$, é ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}$ e de módulo ω/k_r, ou seja,

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\omega}{k_r}$$

e, portanto, o fluxo de energia eletromagnética, em cada z, é dado por

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \langle u\rangle\,\mathbf{v},$$

em analogia com

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$$

para densidades de carga e corrente.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).