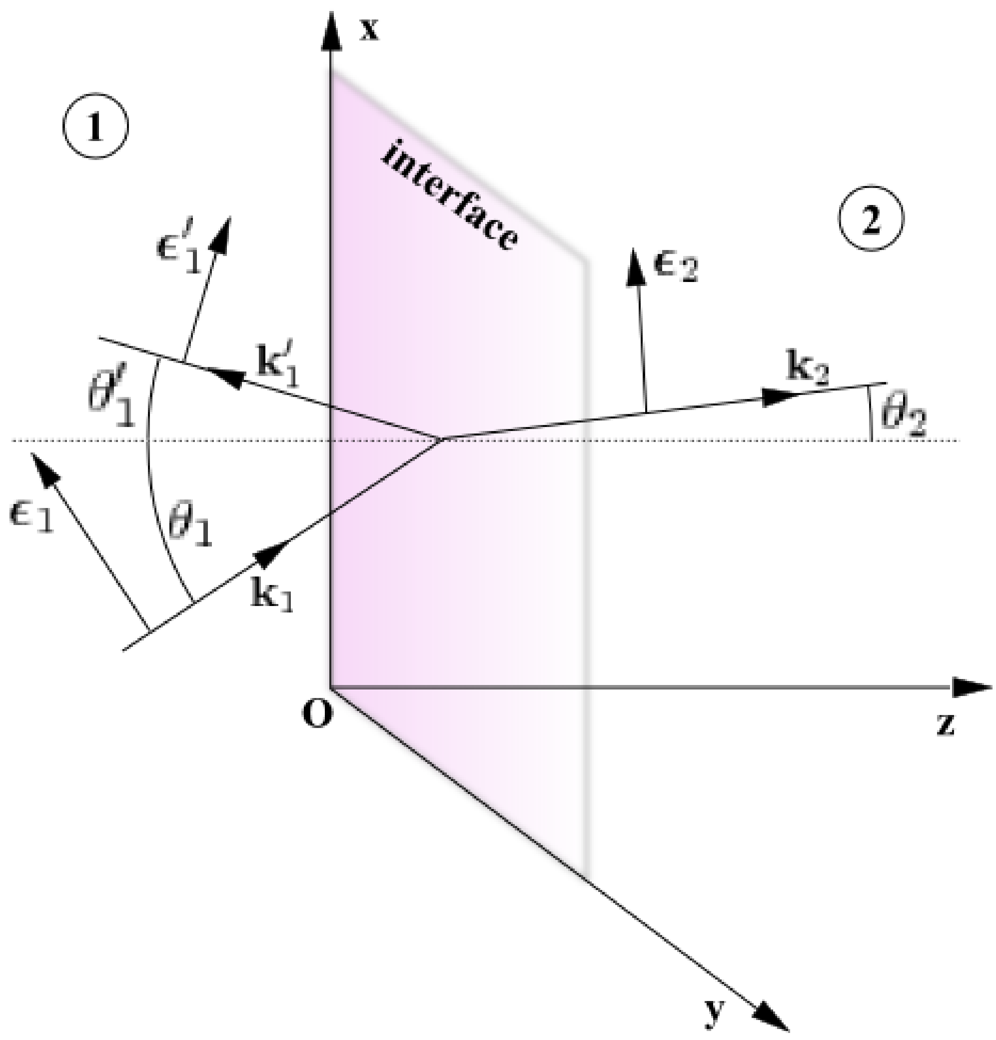
Reflexão e refração na interface entre dois dielétricos no caso da incidência oblíqua

Em uma postagem anterior, Reflexão e refração na interface entre dois meios não condutores, consideramos o caso em que a onda eletromagnética plana incidente é normal à interface de separação entre dois meios dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos. Aqui vamos analisar o comportamento da reflexão e da refração no caso em que a incidência é oblíqua à interface. Também vamos definir o ângulo crítico de incidência, para a circunstância em que não há transmissão, sendo a onda incidente totalmente refletida, e vamos definir o ângulo de Brewster, para a circunstância de incidência em que há polarização por reflexão.

Campo elétrico paralelo ao plano de incidência



Neste caso, escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a interface entre os dois meios dielétricos coincida com o plano xy. Também indexamos os meios dielétricos de modo que o meio 1 tenha $z < 0$ e o meio 2 tenha $z > 0$. Assim, a normal à interface é o versor $\hat{\mathbf{z}}$. O plano de incidência é formado pelo vetor de onda incidente, $\mathbf{k}_1$, e pela normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos o plano de incidência como o plano xz. Como a incidência não é normal à interface, temos

$$\mathbf{k}_1 \quad = \quad \hat{\mathbf{z}} k_1 \cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}} k_1 \sin\theta_1,$$

onde k_1 é o módulo do vetor $\mathbf{k}_1$ e θ_1 é o ângulo de incidência, isto é, o ângulo entre o vetor de onda, $\mathbf{k}_1$, e a normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos polarização plana e o campo elétrico incidente paralelo ao plano de incidência, ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 \quad = \quad \left(-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01}\cos\theta_1\right)\exp\left(izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right).$$

Por isotropia e homogeneidade dos meios dielétricos, as ondas refletida e refratada têm polarizações planas também paralelas ao plano de incidência e podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon}_1' = \left(\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01}' \sin\theta_1' + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01}' \cos\theta_1'\right) \exp\left(-izk_1\cos\theta_1' + ixk_1\sin\theta_1' - i\omega t\right),$$

para a onda refletida, com

$$\mathbf{k}_1' = -\hat{\mathbf{z}}k_1\cos\theta_1' + \hat{\mathbf{x}}k_1\sin\theta_1',$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \left(-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{02}\sin\theta_2 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{02}\cos\theta_2\right)\exp\left(izk_2\cos\theta_2 + ixk_2\sin\theta_2 - i\omega t\right),$$

para a onda refratada, com

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}}k_2\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2\sin\theta_2.$$

Notemos que já escolhemos os campos elétricos de modo a serem ortogonais aos respectivos vetores de onda. Os ângulos θ_1' e θ_2 são, respectivamente, os ângulos de reflexão e refração.

Utilizando a lei da indução de Faraday, temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{\mathbf{k}_1}{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&= \frac{n_1\epsilon_{01}}{c}\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_1\right)\times\left(-\hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1\right)\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= \frac{n_1\epsilon_{01}}{c}\left(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}\cos^2\theta_1 - \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}\sin^2\theta_1\right)\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= \hat{\mathbf{y}}\frac{n_1\epsilon_{01}}{c}\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1' &= \frac{n_1\epsilon_{01}'}{c}\left(-\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1'\cos\theta_1' + \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1'\sin\theta_1'\right)\exp\left(i\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= -\hat{\mathbf{y}}\frac{n_1\epsilon_{01}'}{c}\exp\left(i\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right)
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \hat{\mathbf{y}}\frac{n_2\epsilon_{02}}{c}\exp\left(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).$$

Na ausência de cargas e correntes livres, devemos ter

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\left(\varepsilon_2\boldsymbol{\epsilon}_2 - \varepsilon_1\boldsymbol{\epsilon}_1 - \varepsilon_1\boldsymbol{\epsilon}_1'\right)\big|_{z=0} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2\exp\left(ixk_2\sin\theta_2\right) + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1\exp\left(ixk_1\sin\theta_1\right) \\
&\quad - \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1'\exp\left(ixk_1\sin\theta_1'\right)
\end{aligned}$$

para todo valor de x. Pela independência linear de exponenciais com argumentos distintos, concluímos que

$$k_1\sin\theta_1' = k_1\sin\theta_1, \qquad (1)$$

$$k_2\sin\theta_2 = k_1\sin\theta_1 \qquad (2)$$

e, portanto,

$$-\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2 + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1 - \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1 = 0. \qquad (3)$$

A Eq. (1) dá a lei de reflexão, isto é,

$$\theta_1' = \theta_1.$$

A Eq. (2) dá a lei de refração de Snell & Descartes, ou seja,

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 .$$

Como a componente tangente à interface do campo intensidade magnética é contínua no presente caso, obtemos

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1' \right)\Big|_{z=0} = \mathbf{0}.$$

Para simplificar, vamos supor que os dielétricos sejam tais que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Assim,

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \left(n_2\epsilon_{02} - n_1\epsilon_{01} + n_1\epsilon_{01}' \right) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$n_2\epsilon_{02} - n_1\epsilon_{01} + n_1\epsilon_{01}' = 0. \qquad (4)$$

Usando a Eq. (2), vemos que as Eqs. (3) e (4) são linearmente dependentes. Como a continuidade da componente normal do campo indução magnética está automaticamente satisfeita, resta-nos utilizar a continuidade da componente tangencial do campo elétrico:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1' \right)\big|_{z=0} = \mathbf{0}.$$

Essa equação nos dá

$$\epsilon_{02}\cos\theta_2 - \epsilon_{01}\cos\theta_1 - \epsilon_{01}'\cos\theta_1 = 0. \qquad (5)$$

Resolvendo o sistema de Eqs. (4) e (5), obtemos

$$\epsilon_{01}' = \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}\epsilon_{01}$$

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}\epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

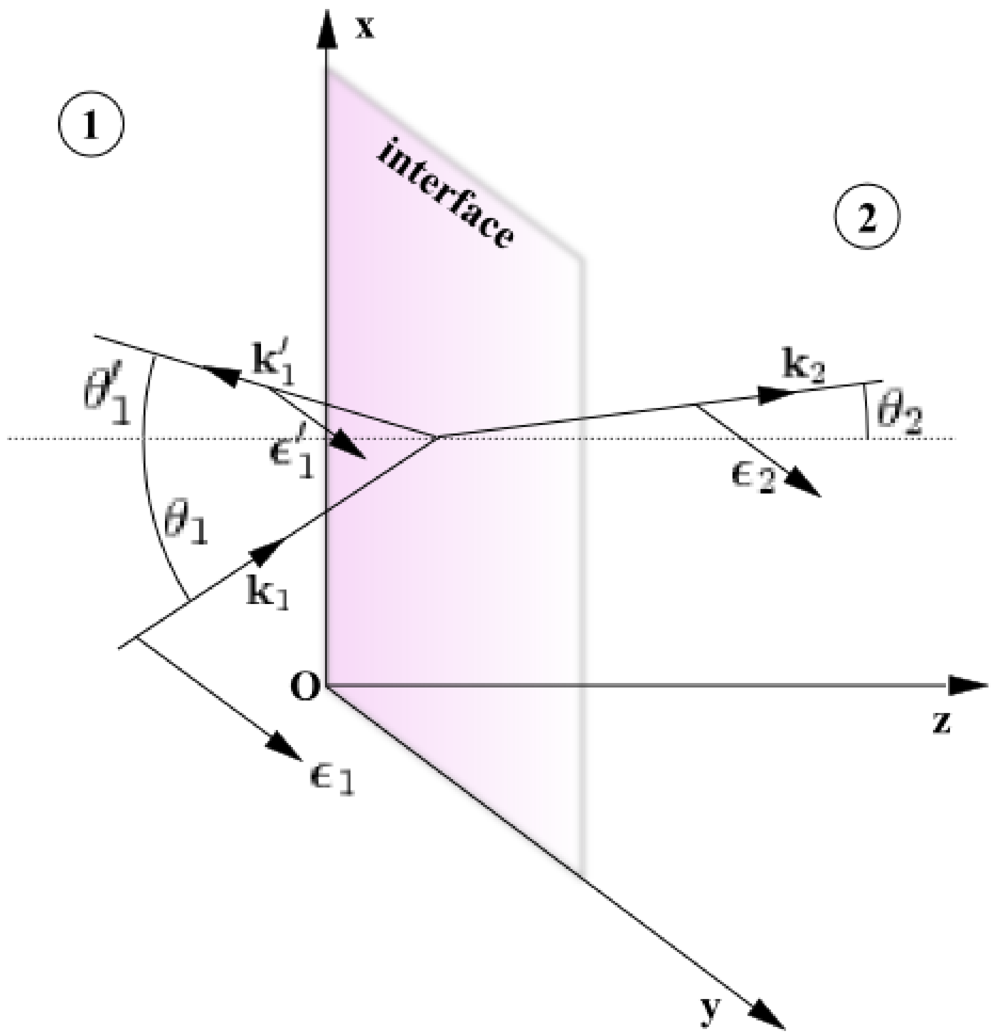
$$\begin{aligned} r_{12p} &= \frac{\epsilon_{01}'}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned} t_{12p} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para transmissão.

Campo elétrico perpendicular ao plano de incidência



Nesse caso, tomamos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \hat{\mathbf{z}} k_1 \cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}} k_1 \sin\theta_1, \\
\mathbf{k}_1' &= -\hat{\mathbf{z}} k_1 \cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}} k_1 \sin\theta_1, \\
\mathbf{k}_2 &= \hat{\mathbf{z}} k_2 \cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}} k_2 \sin\theta_2,
\end{aligned}
$$

como no caso anterior, mas escolhemos os campos elétricos polarizados ao longo do eixo y, isto é,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_1 &= \hat{\mathbf{y}} \epsilon_{01} \exp\left(izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right), \\
\boldsymbol{\epsilon}_1' &= \hat{\mathbf{y}} \epsilon_{01}' \exp\left(-izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right), \\
\boldsymbol{\epsilon}_2 &= \hat{\mathbf{y}} \epsilon_{02} \exp\left(izk_2\cos\theta_2 + ixk_2\sin\theta_2 - i\omega t\right),
\end{aligned}
$$

onde já estamos adiantando que vale a lei de reflexão. Assim, usando a lei da indução de Faraday, temos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{\mathbf{k}_1}{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&= \frac{n_1}{c} \left(\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_1\right) \times \hat{\mathbf{y}} \epsilon_{01} \exp\left(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= \frac{n_1}{c} \left(-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1\right) \epsilon_{01} \exp\left(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right),
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\beta}_1' = \frac{n_1}{c} \left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1\right) \epsilon_{01}' \exp\left(i\mathbf{k}_1' \cdot \mathbf{r} - i\omega t\right)
$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{n_2}{c}\left(-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_2\right)\epsilon_{02}\exp\left(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface, temos

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1'\right)\big|_{z=0} = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon_{01}' = 0. \qquad (6)$$

Também impomos que a componente tangencial do campo intensidade magnética é contínua, obtendo

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1'\right)\bigg|_{z=0} = \mathbf{0},$$

isto é,

$$-n_2\cos\theta_2\epsilon_{02} + n_1\cos\theta_1\epsilon_{01} - n_1\cos\theta_1\epsilon_{01}' = 0. \qquad (7)$$

Agora resolvemos as Eqs. (6) e (7) e concluímos que

$$\epsilon_{01}' = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\epsilon_{01}$$

e

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

$$\begin{aligned} r_{12s} &= \frac{\epsilon_{01}'}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned} t_{12s} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para transmissão. O subescrito "s" nesses coeficientes vem do alemão, "senkrecht", que quer dizer "perpendicular".

O ângulo crítico e o ângulo de Brewster

Ângulo crítico

Agora que temos os resultados acima, podemos analisar o que acontece quando $n_1 > n_2$. Nesse caso, da lei de Snell & Descartes, temos

$$\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1}. \end{aligned}$$

Como temos liberdade de escolher a direção de propagação da onda incidente, podemos tomar $\theta_1 > \theta_c$, onde θ_c é o chamado ângulo crítico, definido pela expressão

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_c = 0,$$

ou seja,

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

Como estamos supondo $n_1 > n_2$, no caso em que $\theta_1 > \theta_c$ temos

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 < 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_c,$$

ou seja,

$$\cos^2\theta_2 < 0.$$

Como

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}} k_2 \cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}} k_2 \sin\theta_2,$$

segue que a solução para a onda transmitida adquire uma parte imaginária no vetor de onda, ao longo da direção $\hat{\mathbf{z}}$. Isso implica em uma onda transmitida que se propaga apenas ao longo do eixo x, mas evanesce ao longo do eixo z.

Ângulo de Brewster

Considerando $n_2 > n_1$, podemos perguntar: quando a luz é refletida de uma superfície, uma de suas componentes de polarização pode ser suprimida para algum ângulo de incidência? Para responder a essa pergunta, primeiro consideramos impor que

$$r_{12s} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = 0.$$

Assim,

$$\cos\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_2$$

e, portanto,

$$1 - \sin^2\theta_1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2\theta_2.$$

Usando a lei de Snell & Descartes, obtemos

$$1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.$$

Como estamos supondo $n_2 > n_1$, vemos que a reflexão da onda com polarização do campo elétrico perpendicular ao plano de incidência não pode ser eliminada com a escolha de um ângulo de incidência especial.

Já para a polarização do campo elétrico paralela ao plano de incidência, vemos que quando a incidência ocorre com o ângulo de Brewster, definido por

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

temos

$$\begin{aligned} r_{12p} &= \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_B}{n_2\cos\theta_B + n_1\cos\theta_2} \\ &= \frac{1}{n_2\cos\theta_B + n_1\cos\theta_2}\left(n_1\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} - n_2\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\sin^2\theta_B}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n_2\cos\theta_B + n_1\cos\theta_2}\left(n_1\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} - n_2\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\frac{n_1^2}{n_1^2+n_2^2}}\right) \\
&= \frac{1}{n_2\cos\theta_B + n_1\cos\theta_2}\left(n_1\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}} - n_2\sqrt{\frac{n_1^2}{n_1^2+n_2^2}}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Assim, a incidência de luz não polarizada, fazendo o ângulo de Brewster com a normal à interface entre os meios dielétricos, resulta em luz refletida polarizada com o campo elétrico perpendicular ao plano de incidência.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).