A corrente de deslocamento e as equações de Maxwell

Nesta postagem vamos introduzir a corrente de deslocamento como é entendida hoje, com uma exposição didática, usando a notação atual. Aqui adotamos uma abordagem baseada no conhecimento que é comum adquirir depois de um curso semestral de eletrostática e magnetostática. Essa abordagem moderna é, no entanto, muito diferente daquela que James Clerk Maxwell (1831-1879) adotou, pois ele imaginava que os fenômenos eletromagnéticos resultavam de manifestações mecânicas de um meio material elástico, que ficou conhecido como o éter. Do ponto de vista clássico do século XX, no entanto, as forças eletromagnéticas agem não apenas através de um meio material mas também através do vácuo. Então, a inferência que vamos ver a seguir é de valor didático, mas não representa, de forma alguma, o raciocínio que levou Maxwell a introduzir sua corrente de deslocamento. Mesmo o nome dado a essa corrente não corresponde a conceito algum que faça sentido do ponto de vista da discussão seguinte, embora na maior parte dos livros-texto essa advertência não seja feita.

Usualmente, nos cursos de eletrostática e magnetostática, começamos com a ideia de carga elétrica, de sua conservação e da força de Coulomb. Então, até o final do semestre, gradativamente vamos introduzindo e estudando as seguintes equações para os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (lei de Gauss)},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0 \text{ (ausência de monopolos magnéticos)},\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \text{ (lei da Indução de Faraday)},\\
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J} \text{ (lei de Ampère)}.
\end{aligned}
$$

Como a carga é conservada, vale a equação da continuidade, ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Tomando o divergente de ambos os membros da lei de Ampère e igualando, temos

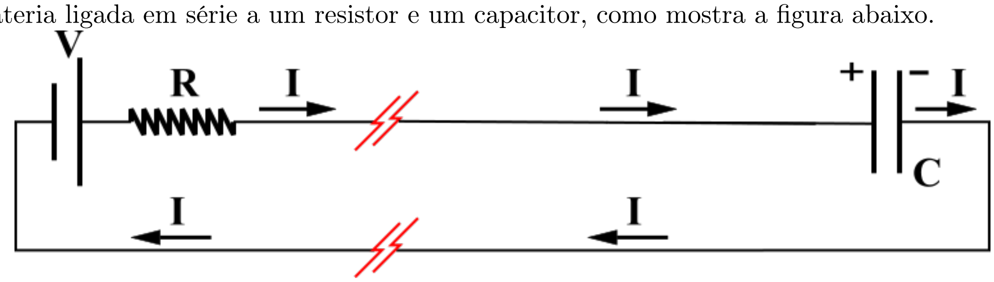
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}.$$

Como o divergente de um rotacional é identicamente nulo, concluímos que, pela lei de Ampère, não vale a equação da continuidade, pois, mesmo que ρ seja dependente do tempo, a lei de Ampère fornece

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0,$$

contradizendo a conservação da carga elétrica. Vemos, assim, que está faltando algo nas equações acima. Na segunda metade do século XIX James Clerk Maxwell (1831-1879) modificou a lei de Ampère. A equação resultante, conhecida como a lei de Ampère & Maxwell, implica a validade da equação da continuidade e, portanto, é consistente com a conservação da carga elétrica.

Para sermos didáticos, vamos colocar esse problema em termos concretos considerando um circuito com uma bateria ligada em série a um resistor e um capacitor, como mostra a figura abaixo.



Usando a regra de Kirchhoff para diferenças de potencial, temos

$$V-\frac{Q}{C}-RI = 0,$$

onde V é a força eletromotriz constante fornecida pela bateria, Q é a carga na placa diretamente ligada ao terminal positivo da bateria, C é a capacitância do capacitor, R é a resistência do resistor e

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

é a corrente que escolhemos ao longo do sentido que vai do terminal positivo ao negativo da bateria. Assim, podemos resolver a equação:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} - \frac{V}{R} = 0.$$

Consideremos o fator integrante

$$\exp\left(\frac{t}{RC}\right).$$

Então, a equação acima pode ser escrita como

$$\left[\left(\frac{dQ}{dt}\right) + \frac{Q}{RC}\right]\exp\left(\frac{t}{RC}\right) = \frac{V}{R}\exp\left(\frac{t}{RC}\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left[Q\exp\left(\frac{t}{RC}\right)\right] = \frac{V}{R}\exp\left(\frac{t}{RC}\right).$$

A solução geral para essa equação diferencial ordinária de primeira ordem é

$$Q\left(t\right)\exp\left(\frac{t}{RC}\right) = K + CV\exp\left(\frac{t}{RC}\right),$$

ou ainda,

$$Q\left(t\right) = K\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + CV,$$

onde K é uma constante arbitrária. Se, em $t = 0$, o capacitor possuía carga nula, temos

$$0 = K + CV,$$

isto é,

$$K = -CV.$$

Logo,

$$Q\left(t\right) = CV\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right].$$

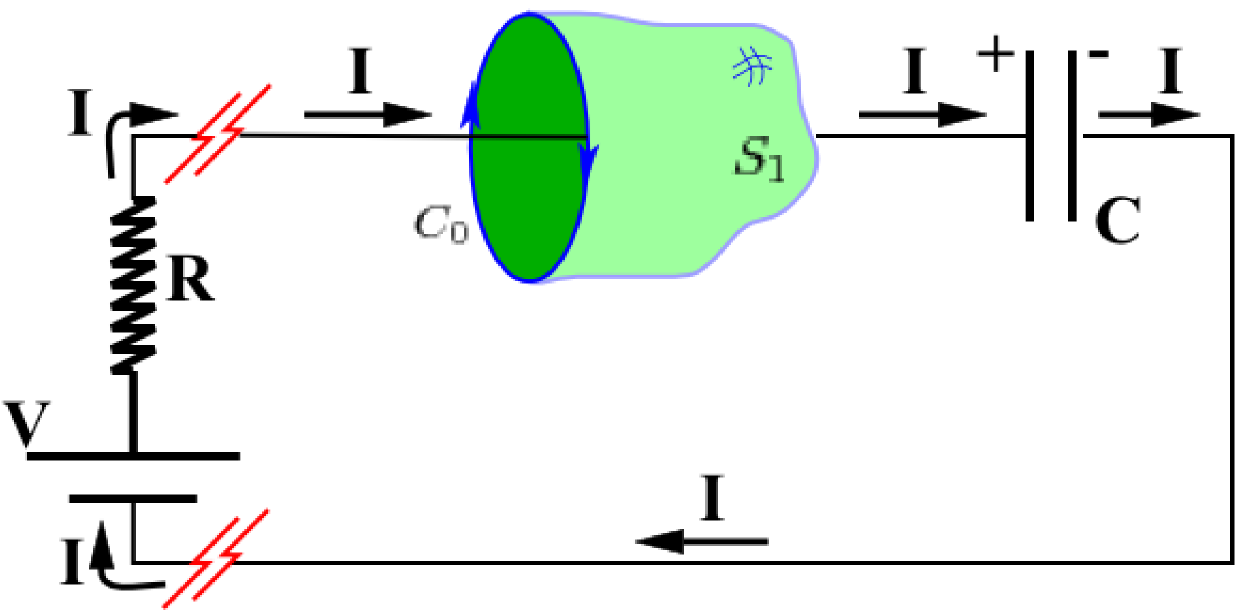
A corrente através do circuito é, portanto, dada por

$$I\left(t\right) = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

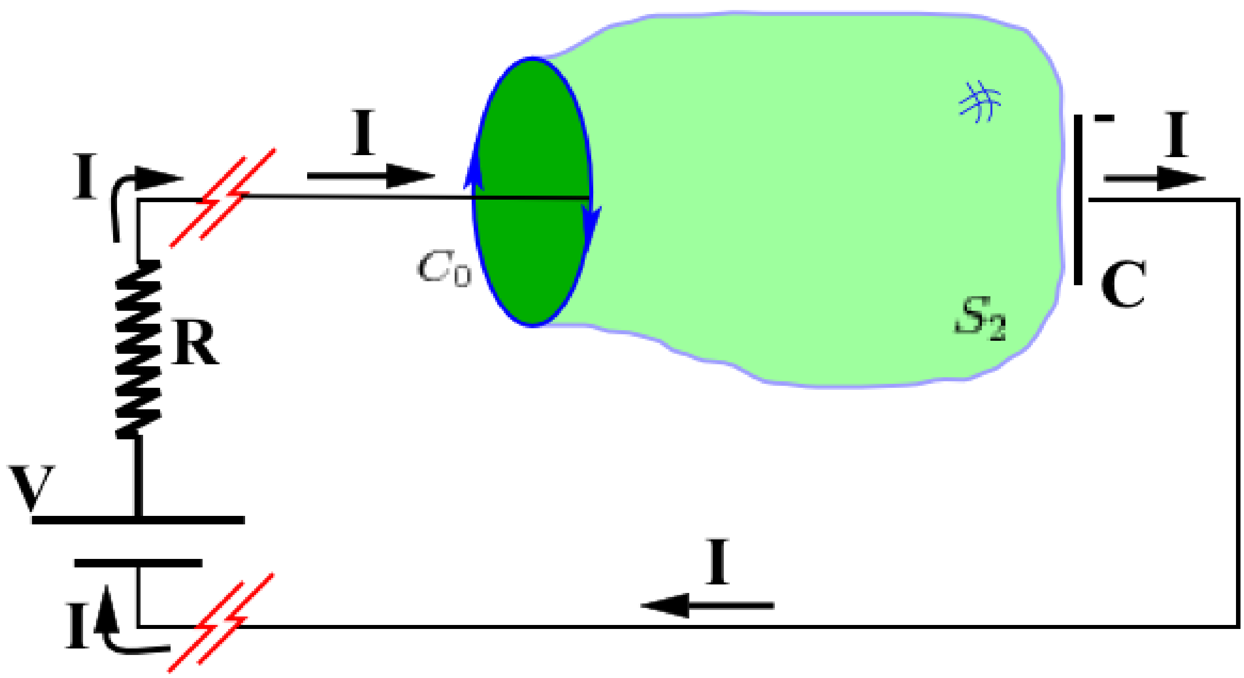
Desse problema simples concluímos que há entrada de cargas na placa do capacitor que está conectada ao terminal positivo da bateria e há saída de cargas da outra placa. No entanto, entre as placas do capacitor, supostamente vácuo, não há passagem de cargas. No instante $t < \infty$, tomemos uma circuitação circular em um plano transversal ao fio que conecta o terminal positivo da bateria a uma das placas do capacitor. A lei de Ampère fornece

$$\begin{aligned}\oint_{C_0}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} &= \mu_0 I\left(t\right)\\ &\neq 0,\end{aligned}$$

se S_1, uma superfície cuja fronteira é o circuito C_0, for escolhida de forma que o fio tenha um ponto de intersecção com S_1, como mostra a figura abaixo.



No entanto, essa mesma circuitação dá zero se, ao invés de S_1, escolhermos S_2, uma outra superfície cuja fronteira é o circuito C_0, sem ponto algum de intersecção com o fio, isto é, S_2 passa entre as placas do capacitor, como ilustrado na figura a seguir.



Uma forma de termos consistência nesse caso é impor que haja corrente entre as placas do capacitor, embora não haja matéria atravessando a região. Assim, entre as placas do capacitor, devemos ter uma corrente que iguale $I(t)$, mas que não é devida ao transporte de matéria. Essa corrente foi postulada por Maxwell e é chamada de "corrente de deslocamento".

Vamos agora inferir a mudança necessária à lei de Ampère para incluir a corrente de deslocamento. Observemos que entre as placas do capacitor há um campo elétrico dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{z}}\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A},$$

onde A é a área de cada placa paralela do capacitor e $\hat{\mathbf{z}}$ é o sentido da corrente de deslocamento, que aponta da placa positiva à negativa do capacitor. Aqui estamos desprezando efeitos de bordas. Então, a única entidade física que podemos considerar entre as placas do capacitor é o campo elétrico, que é proporcional à carga na placa positiva do capacitor. Portanto, se há alguma quantidade física entre as placas que pode fornecer a explicação para uma corrente ali, então essa quantidade deve estar relacionada ao campo elétrico. Como discutimos acima, o valor da corrente de deslocamento coincide com a derivada temporal de $Q(t)$. Então, podemos usar esse fato para relacionar o valor de $I(t)$ com o do campo elétrico entre as placas, tomando a derivada temporal da equação acima:

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \hat{\mathbf{z}}\frac{I(t)}{\varepsilon_0 A}.$$

Para isolarmos $I(t)$ podemos considerar o fluxo através de uma superfície S entre as placas do capacitor, de área A, paralela e idêntica às placas do capacitor:

$$I(t) = \varepsilon_0 \int_S da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Com isso, podemos "corrigir" a lei de Ampère se, sobre S_2, impusermos

$$\begin{aligned} \mu_0\varepsilon_0 \int_{S_2} da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \oint_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{S_2} da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Como essa expressão vale sobre S_2, que não tem intersecção com o fio, podemos inferir que essa igualdade vale para o espaço vazio e sobre qualquer superfície cuja fronteira é C_0. Logo, podemos obter a forma diferencial dessa nova lei de Ampère para o vácuo:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Caso seja adicionada uma corrente de matéria, então generalizamos a lei de Ampère da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

No caso de materiais dielétricos e magnéticos lineares, homogêneos e isotrópicos, é fácil mostrar que a lei de Ampère fica

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}. \end{aligned}$$

A lei de Ampère, com o termo de deslocamento, também é conhecida como a lei de Ampère & Maxwell.

Notemos que agora a equação da continuidade não é violada, pois, tomando o divergente em ambos os membros da lei de Ampère & Maxwell, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \\ &= \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \\ &= \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a lei de Gauss.

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).