A equação de onda

A luz e outras formas de radiação eletromagnética propagam-se por meio de ondas eletromagnéticas através do vácuo ou do meio material, caso esse meio permita a propagação dessas ondas. No caso do vácuo, essas ondas se propagam sempre com a chamada velocidade da luz, c, uma constante universal, com o valor exato dado por

$$c = 299.792,458 \text{ km/s}$$

(usando a convenção brasileira para pontos e vírgulas, isto é, c é igual a duzentos e noventa e nove mil, setecentos e noventa e dois quilômetros por segundo e quatrocentos e cinquenta e oito metros por segundo). Já para meios materiais, a velocidade da luz é menor do que esse valor e dependente da frequência predominante, pois não é possível produzir ondas estritamente monocromáticas. Nesta postagem vamos ver como as ondas eletromagnéticas são descritas usando as equações de Maxwell.

Se tomamos o rotacional de ambos os membros da lei da indução de Faraday, obtemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})}{\partial t}. \qquad (1)$$

Se consideramos um meio dielétrico linear, isotrópico e homogêneo onde não há cargas ou correntes livres, então $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e as leis de Gauss e de Ampère & Maxwell ficam

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Logo, a equação acima pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Essa é a equação de onda para o campo elétrico.

Podemos também obter a equação de onda para o campo indução magnética. Para isso, supondo que o meio dielétrico seja linear, isotrópico e homegêneo, sem cargas ou correntes, podemos tomar o rotacional de ambos os membros da lei de Ampère & Maxwell para obter

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mu\varepsilon \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Usando o fato de que não há monopolos magnéticos e a lei da indução de Faraday, obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

No caso em que o meio não é dielétrico, mas é ôhmico e possui uma condutividade g, as equações acima devem ser modificadas. No caso de meio ôhmico, temos

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}.$$

Logo, a lei de Ampère & Maxwell fica

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu g \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \qquad (2)$$

Com isso, a Eq. (1) resulta em

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu g\mathbf{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\\ &= -\mu g\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Ainda considerando a ausência de cargas livres, obtemos

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu g\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Tomando o rotacional de ambos os membros da Eq. (2) e usando a lei da indução de Faraday, temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) &= \mu g(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})+\mu\varepsilon\frac{\partial(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})}{\partial t}\\ &= -\mu g\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

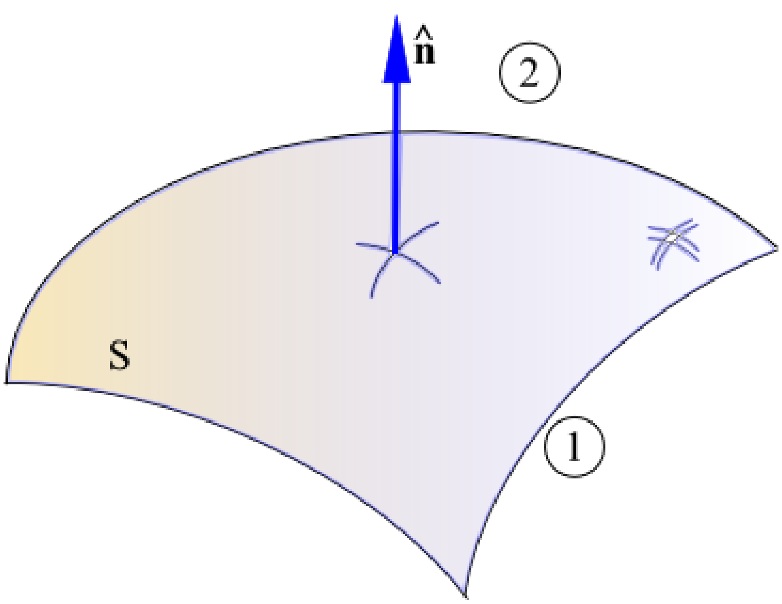
ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})-\nabla^2\mathbf{B} = -\mu g\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Como não há monopolos magnéticos, a equação de onda para o campo indução magnética fica

$$\nabla^2\mathbf{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu g\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Condições de contorno para os campos



Das equações

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$$

segue que as condições de contorno para as componentes normais de $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ são as mesmas que para o caso estático, isto é,

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)|_S = \sigma$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_S \quad = \quad 0,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor que aponta do meio 1 para o meio 2 e S é a interface de separação entre os meios.

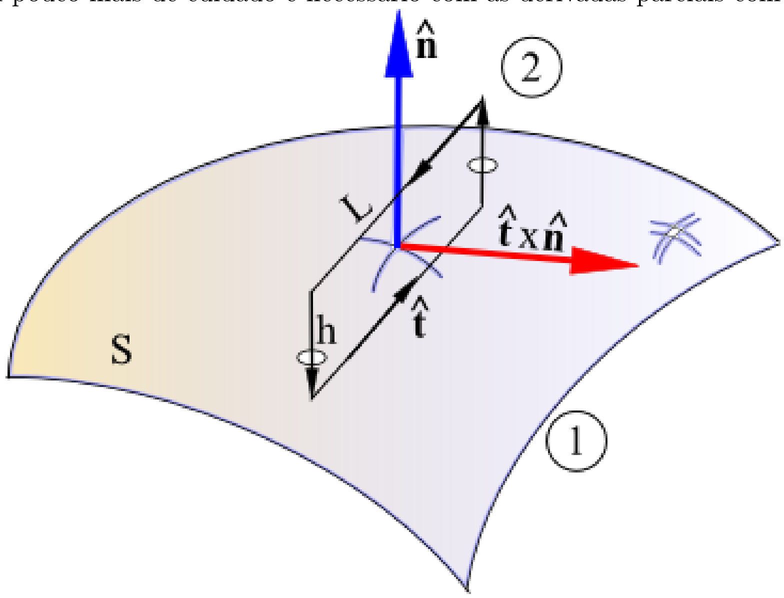
Para as equações

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \quad = \quad -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} \quad = \quad \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

um pouco mais de cuidado é necessário com as derivadas parciais com relação ao tempo.



Por exemplo, para a lei de Ampère & Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} \quad = \quad \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

consideramos um ponto sobre a interface S e fazemos uma circuitação plana e retangular, com seu plano contendo a normal à superfície no ponto considerado. Se $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal, seja $\hat{\mathbf{t}}$ um versor perpendicular à normal no ponto considerado. Então, $\hat{\mathbf{t}}$ é tangente à superfície S. O vetor $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ é também um versor e é ortogonal a ambos os versores $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$. Com esses três versores, construamos uma circuitação em torno do ponto considerado da interface S. Ao longo de $\hat{\mathbf{t}}$, na região 1, tracemos um lado do retângulo de comprimento L. Ao longo de $\hat{\mathbf{n}}$, atravessando a interface da região 1 para a região 2, tracemos outro lado do retângulo de comprimento h. O retângulo está completo e podemos considerar o teorema de Stokes para o fluxo do campo intensidade magnética sobre a superfície do retângulo, considerando L e h infinitesimais:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{ret}} da\ \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H}) &= \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} \\
&= L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 \\
&- L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 \\
&= L\hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\
&= \int_{\text{ret}} da\ \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \\
&= L\left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \mathbf{j} + \int_{\text{ret}} da\ \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{j}$ é a corrente livre superficial na interface S. A condição de contorno nesse caso dá

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\big|_S &= \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \mathbf{j} + \int_{\mathrm{ret}} \frac{da}{L} \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right), \\ &= \hat{\mathbf{t}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}), \end{aligned}$$

pois

$$\int_{\mathrm{ret}} \frac{da}{L} \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \quad \to \quad 0$$

quando

$$h \quad \to \quad 0.$$

Assim, a componente tangencial do campo intensidade magnética não é contínua quando $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. No entanto, $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário; vamos então reescrever essa condição de contorno em termos apenas da normal $\hat{\mathbf{n}}$. Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e tangente a S, então, $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j})$ deve ser perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$, ou seja,

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \quad = \quad \alpha \hat{\mathbf{n}} + \beta \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j})\big|_S &= \beta \hat{\mathbf{n}} \times \left(\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \\ &= \beta \hat{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e o membro esquerdo dessa equação não é arbitrário, segue que $\beta = 0$ e a condição de contorno fica

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\big|_S &= \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \\ &= \hat{\mathbf{n}} \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}\right) - \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{j}$ é tangente à interface, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} \quad = \quad 0$$

e, portanto,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\big|_S \quad = \quad \mathbf{j},$$

como no caso estático. Analogamente, da lei da indução de Faraday segue a continuidade da componente tangencial de $\mathbf{E}$:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)\big|_S \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Bibliografia

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford e Robert W. Christy , *Foundations of Electromagnetic Theory*, terceira edição (Addison-Wesley Publishing Company, 1979).