Problema 4-27 do livro do Symon

Recentemente, durante o curso de Mecânica Clássica I que estou ministrando, surgiu a necessidade de mostrar aos estudantes como resolver problemas. O livro-texto utilizado, do Symon, tem enunciados considerados difíceis pelos estudantes. Então, como o tempo de curso é muito limitado para apresentar todo o material teórico da ementa da disciplina e também aulas de exercícios, estou tentando suprir a necessidade de resolução de exercícios através de videoaulas. Nesta postagem, portanto, apresento um vídeo com a resolução detalhada do problema de número 27, do capítulo 4 do livro do Symon, que trata do espalhamento de Compton, envolvendo colisões elásticas entre fótons de raios X e elétrons. Esse problema é certamente difícil para uma turma de Mecânica Clássica I, pois envolve conceitos de mecânica quântica e relatividade especial, que não são parte do programa até períodos seguintes do bacharelado em física, após os estudantes terem passado por esse curso introdutório de mecânica clássica. A despeito disso, mostro nesta postagem e no vídeo que a acompanha que os conceitos introduzidos em aula são suficientes para resolver o problema do espalhamento de Compton.

Segue o enunciado do problema:

27. The Compton scattering of x-rays can be interpreted as the result of elastic collisions between x-ray photons and free electrons. According to quantum theory, a photon of wavelength λ has a kinetic energy hc/λ, and a linear momentum of magnitude h/λ, where h is Planck's constant and c is the speed of light. In the Compton effect, an incident beam of x-rays of known wavelength λ_I in a known direction is scattered in passing through matter, and the scattered radiation at an angle ϑ_1 to the incident beam is found to have a longer wavelength λ_F, which is a function of the angle ϑ_1. Assuming an elastic collision between an incident photon and an electron of mass m at rest, set up the equations expressing conservation of energy and momentum. Use the relativistic expressions for the energy and momentum of the electron. Show that the change in x-ray wavelength is

$$\lambda_F - \lambda_I = \frac{h}{mc}(1 - \cos \vartheta_1),$$

and that the ejected electron appears at an angle given by

$$\tan \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{[1 + (h/\lambda_I mc)](1 - \cos \vartheta_1)}.$$

Agora, a resolução, para acompanhar com o vídeo:

Usando conservação de momentum linear, obtemos

$$\frac{h}{\lambda_I} = \frac{h}{\lambda_F}\cos\theta_1 + p\cos\theta_2, \qquad (1)$$

$$0 = \frac{h}{\lambda_F}\mathrm{sen}\theta_1 - p\,\mathrm{sen}\theta_2, \qquad (2)$$

$$\frac{hc}{\lambda_I} = \frac{hc}{\lambda_F} + \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2\right) \qquad (3)$$

e

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4)$$

A Eq. (1) pode também ser escrita como

$$\frac{h}{\lambda_I} - \frac{h}{\lambda_F}\cos\theta_1 = p\cos\theta_2. \qquad (5)$$

Elevando a Eq. (5) ao quadrado, temos

$$\left(\frac{h}{\lambda_I} - \frac{h}{\lambda_F}\cos\theta_1\right)^2 = p^2\cos^2\theta_2. \qquad (6)$$

A Eq. (2) dá

$$\frac{h}{\lambda_F}\mathrm{sen}\theta_1 = p\,\mathrm{sen}\theta_2, \qquad (7)$$

que, elevada ao quadrado, produz

$$\left(\frac{h}{\lambda_F}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta_1 = p^2\mathrm{sen}^2\theta_2. \qquad (8)$$

Somando, membro a membro, as Eqs. (6) e (8), obtemos

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(\frac{h}{\lambda_I} - \frac{h}{\lambda_F}\cos\theta_1\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_F}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta_1 \\ &= \left(\frac{h}{\lambda_I}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_F}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_I\lambda_F}\cos\theta_1. \qquad (9) \end{aligned}$$

Elevando a Eq. (4) ao quadrado, vem

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad (10)$$

isto é,

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{m^2c^2\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1\right) \\ &= m^2c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + 1\right). \qquad (11) \end{aligned}$$

Da Eq. (3), temos

$$\frac{h}{mc\lambda_I} - \frac{h}{mc\lambda_F} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (12)$$

A substituição da Eq. (12) na Eq. (11) fornece

$$\begin{aligned} p^2 &= m^2c^2\left(\frac{h}{mc\lambda_I} - \frac{h}{mc\lambda_F}\right)\left(\frac{h}{mc\lambda_I} - \frac{h}{mc\lambda_F} + 2\right) \\ &= \left(\frac{h}{\lambda_I} - \frac{h}{\lambda_F}\right)^2 + \frac{2mch}{\lambda_I\lambda_F}\left(\lambda_F - \lambda_I\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$p^2 = \left(\frac{h}{\lambda_I}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_F}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_I\lambda_F} + \frac{2mch}{\lambda_I\lambda_F}\left(\lambda_F - \lambda_I\right). \qquad (13)$$

Substituindo a Eq. (13) na Eq. (9), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{\lambda_I}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_F}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_I\lambda_F} + \frac{2mch}{\lambda_I\lambda_F}\left(\lambda_F - \lambda_I\right) &= \left(\frac{h}{\lambda_I}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_F}\right)^2 \\ &- 2\frac{h^2}{\lambda_I\lambda_F}\cos\theta_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{2mch}{\lambda_I\lambda_F}\left(\lambda_F - \lambda_I\right) = 2\frac{h^2}{\lambda_I\lambda_F} - 2\frac{h^2}{\lambda_I\lambda_F}\cos\theta_1,$$

ou ainda,

$$\lambda_F - \lambda_I = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta_1\right), \qquad (14)$$

como desejado.

Dividindo a Eq. (7) pela Eq. (5), conseguimos

$$\frac{\frac{h}{\lambda_F}\mathrm{sen}\theta_1}{\frac{h}{\lambda_I} - \frac{h}{\lambda_F}\cos\theta_1} = \frac{p\,\mathrm{sen}\theta_2}{p\cos\theta_2},$$

isto é,

$$\mathrm{tg}\theta_2 = \frac{\mathrm{sen}\theta_1}{\frac{\lambda_F}{\lambda_I} - \cos\theta_1}. \qquad (15)$$

Usando a Eq. (14) na Eq. (15) dá

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\theta_2 &= \frac{\mathrm{sen}\theta_1}{1 + \frac{h}{\lambda_I mc}\left(1 - \cos\theta_1\right) - \cos\theta_1} \\ &= \frac{\mathrm{sen}\theta_1}{\left(1 + \frac{h}{\lambda_I mc}\right)\left(1 - \cos\theta_1\right)}, \qquad (16) \end{aligned}$$

conforme o enunciado.