A relação entre as matrizes de espalhamento e de transição

Em postagens recentes defini as matrizes de transição e de espalhamento. Já mostramos, na postagem Matriz de transição, que esta matriz está relacionada com a amplitude de espalhamento, que é a quantidade cujo módulo elevado ao quadrado pode ser determinado em experimentos colisionais. De fato, a seção de choque diferencial para um determinado processo colisional é dada como o quadrado do módulo da amplitude de espalhamento. Nesta postagem vou mostrar a relação que existe entre as matrizes de transição e de espalhamento, conectando, portanto, a matriz de espalhamento com os experimentos através da matriz de transição. Uma das propriedades características da matriz de espalhamento é sua unitariedade, que também demonstraremos nesta postagem.

Na postagem sobre a matriz de transição definimos seus elementos como sendo

$$T^{\pm}_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} \equiv \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int} \left|\Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle . \qquad (1)$$

Como a relação da matriz T com a amplitude de espalhamento,

$$f^{s'}_{s}\left(E,\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{p}}\right) = -4\pi^{2}\frac{\hbar}{p}T^{+}_{p\hat{\mathbf{r}},s';\mathbf{p},s}, \qquad (2)$$

envolve apenas $T^{+}_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s}$, vamos ignorar $T^{-}_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s}$ nesta postagem. A matriz de espalhamento tem seus elementos dados por

$$S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} = \left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right|\left.\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle . \qquad (3)$$

Como relacionar a Eq. (3) com a Eq. (1)?

Consideremos as equações de Lippmann e Schwinger, que, como vimos na Parte 5, são dadas por

$$\left|\Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle = \left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0^{\pm}}\frac{1}{E-H_{0}+i\varepsilon}H_{int}\left|\Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle . \qquad (4)$$

Também vimos na postagem Matriz de espalhamento que

$$\left|\Psi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E,\varepsilon\right)\right\rangle = \frac{i\varepsilon}{E-H+i\varepsilon}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle , \qquad (5)$$

onde

$$H = H_{0}+H_{int} \qquad (6)$$

e demonstramos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^{\pm}}\left|\Psi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E,\varepsilon\right)\right\rangle = \left|\Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle . \qquad (7)$$

Note agora que

$$
\begin{aligned}
\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle + \frac{1}{E-H+i\varepsilon}H_{int}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle &= \mathbb{I}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle + \frac{1}{E-H+i\varepsilon}H_{int}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\
&= \frac{1}{E-H+i\varepsilon}\left[(E-H+i\varepsilon)+H_{int}\right]\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle + \frac{1}{E-H+i\varepsilon}H_{int}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle &= \frac{1}{E-H+i\varepsilon}\left(E-H_0+i\varepsilon\right)\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\
&= \frac{i\varepsilon}{E-H+i\varepsilon}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle , \qquad (8)
\end{aligned}
$$

onde usamos a Eq. (6) e o fato de que

$$
H_0\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle = E\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle . \qquad (9)
$$

Logo, substituindo a Eq. (9) na Eq. (5), obtemos

$$
\left|\Psi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E,\varepsilon)\right\rangle = \left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle + \frac{1}{E-H+i\varepsilon}H_{int}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle . \qquad (10)
$$

Então, tomando o limite em que $\varepsilon \to 0^{\pm}$ da Eq. (10) e lembrando a Eq. (7), vem

$$
\left|\Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle = \left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0^{\pm}}\frac{1}{E-H+i\varepsilon}H_{int}\left|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle , \qquad (11)
$$

que é a chamada “forma fechada” das equações de Lippmann e Schwinger. A Eq. (11) nos permite escrever o bra $\left\langle\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|$ assim:

$$
\begin{aligned}
\left\langle\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right| &= \left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right| + \lim_{\varepsilon\to 0^{-}}\left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon} \\
&= \left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right| + \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|H_{int}\frac{1}{E'-H+i\varepsilon} . \qquad (12)
\end{aligned}
$$

A substituição da Eq. (12) na Eq. (3) dá

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|H_{int}\frac{1}{E'-H+i\varepsilon}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle . \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Usando a Eq. (4) no primeiro termo do segundo membro da Eq. (13), obtemos

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|\frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H_{int}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|H_{int}\frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle , \qquad (14)
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que

$$H\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle = E\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle. \qquad (15)$$

O uso da Eq. (9) no segundo termo do segundo membro da Eq. (14) fornece

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\rangle + \lim_{\varepsilon\to0^+}\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|\frac{1}{E-E'+i\varepsilon}H_{int}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to0^+}\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|H_{int}\frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle. \qquad (16)\end{aligned}$$

É evidente agora que a Eq. (16) pode também ser expressa assim:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{E-E'+i\varepsilon}+\frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\right)\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|H_{int}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle. \qquad (17)\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{E-E'+i\varepsilon}+\frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\right) &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{E-E'+i\varepsilon}-\frac{1}{E-E'-i\varepsilon}\right) \\ &= -2i\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon}{(E'-E)^2+\varepsilon^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{E-E'+i\varepsilon}+\frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\right) = -2\pi i\delta(E'-E) \qquad (18)$$

como demonstrado na postagem Uma relação útil para denominadores singulares. Substituindo a Eqs. (1) e (18) na Eq. (17) dá

$$S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} = \delta(E'-E)\,\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{p}}'-\hat{\mathbf{p}})\,\delta_{s',s} - 2\pi i\delta(E'-E)\,T^{+}_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s}, \qquad (19)$$

onde usamos a equação

$$\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\rangle = \delta(E'-E)\,\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{p}}'-\hat{\mathbf{p}})\,\delta_{s',s} \qquad (20)$$

(cf. Eqs. (3) e (6) da postagem Autoestados da energia cinética e Eq. (25) da Parte 5).

Agora vou demonstrar a unitariedade da matriz S. Para isso, antes devemos demonstrar a ortonormalidade dos estado tipo "in" e tipo "out". Calculemos, então:

$$\begin{aligned} \left\langle\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle &= \left\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to0^+}\langle\Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')|H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle, \qquad (21)\end{aligned}$$

onde, usamos

$$\left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| = \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| + \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon}, \tag{22}$$

que decorre da Eq. (11). Substituindo a Eq. (4) no primeiro termo do segundo membro da Eq. (21), obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle &= \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H_{int}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

Em virtude das Eqs. (9) e (15), a Eq. (23) fica

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle &= \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| \frac{1}{E-E'+i\varepsilon}H_{int}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int}\frac{1}{E'-E-i\varepsilon}\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle, \end{aligned} \tag{24}$$

isto é,

$$\left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle = \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle, \tag{25}$$

ou seja,

$$\left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle = \delta\left(E'-E\right)\delta^{(2)}\left(\hat{\mathbf{p}}'-\hat{\mathbf{p}}\right)\delta_{s',s}, \tag{26}$$

com o uso da Eq. (20). Assim, vemos que os estados tipo "in" são ortonormais. De forma análoga, calculemos:

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle &= \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{-}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon}\left|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle, \end{aligned} \tag{27}$$

onde, usamos

$$\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| = \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| + \lim_{\varepsilon\to 0^{-}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon}, \tag{28}$$

que decorre da Eq. (11). Substituindo a Eq. (4) no primeiro termo do segundo membro da Eq. (27), obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle &= \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\middle|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{-}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| \frac{1}{E-H_0+i\varepsilon}H_{int}\left|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^{-}} \left\langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}\left(E'\right)\right| H_{int}\frac{1}{E'-H-i\varepsilon}\left|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}\left(E\right)\right\rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

Em virtude das Eqs. (9) e (15), a Eq. (29) fica

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') \middle| \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle &= \langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') | \Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^-} \langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') | \frac{1}{E-E'+i\varepsilon} H_{int} \left| \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0^-} \langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') | H_{int} \frac{1}{E'-E-i\varepsilon} \left| \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle, \qquad (30)\end{aligned}$$

isto é,

$$\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') \middle| \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle = \langle \Phi_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') | \Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \rangle, \qquad (31)$$

ou seja,

$$\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') \middle| \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle = \delta(E'-E)\,\delta^{(2)}(\hat{\mathbf{p}}'-\hat{\mathbf{p}})\,\delta_{s',s}, \qquad (32)$$

com o uso da Eq. (20). Assim, vemos que os estados tipo “out” também são ortonormais.

Veja que há uma correspondência biunívoca entre os estados $|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\rangle$ e os correspondentes estados “in” e “out”. Os estados $|\Phi_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\rangle$ formam um conjunto completo de estados do contínuo. Por causa da relação biunívoca entre estes estados e os estados tipo “in”, por exemplo, estes últimos também formam um conjunto completo para estados do contínuo. O mesmo pode ser dito dos etados tipo “out”. No entanto, pode ser que o operador H_{int} gere estados ligados, que estamos sempre supondo que não estão embebidos no contínuo. Dessa forma, um conjunto completo de estados pode ser obtido pelos estados tipo “in”, digamos, e uma base de estados ligados. O mesmo pode ser dito dos estados tipo “out”. Com isso, podemos escrever:

$$\mathbb{I} = \sum_{s=\uparrow}^{\downarrow} \int_0^\infty dE \int_0^\pi \mathrm{sen}\theta_{\hat{\mathbf{p}}} d\theta_{\hat{\mathbf{p}}} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\hat{\mathbf{p}}} \left| \Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle \left\langle \Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right| + \Lambda, \qquad (33)$$

onde Λ é um projetor no subespaço de estados ligados. Com a hipótese de que não há estados ligados embebidos no contínuo, temos

$$\Lambda \left| \Psi^{\pm}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle = 0. \qquad (34)$$

Para a conveniência notacional do que segue, vamos definir:

$$\sum_{\mathbf{p},s} \equiv \sum_{s=\uparrow}^{\downarrow} \int_0^\infty dE \int_0^\pi \mathrm{sen}\theta_{\hat{\mathbf{p}}} d\theta_{\hat{\mathbf{p}}} \int_0^{2\pi} d\varphi_{\hat{\mathbf{p}}}. \qquad (35)$$

Agora, sim, podemos demonstrar a unitariedade da matriz S. Então, com a notação da Eq. (35), calculemos:

$$\begin{aligned}\left[S^\dagger S\right]_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \sum_{\mathbf{p}'',s''} S^\dagger_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p}'',s''} S_{\mathbf{p}'',s'';\mathbf{p},s} = \sum_{\mathbf{p}'',s''} S^*_{\mathbf{p}'',s'';\mathbf{p}',s'} S_{\mathbf{p}'',s'';\mathbf{p},s} \\ &= \sum_{\mathbf{p}'',s''} \left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}'',s''}(E'') \middle| \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E') \right\rangle^* \left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}'',s''}(E'') \middle| \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E) \right\rangle,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\left[S^{\dagger}S\right]_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \sum_{\mathbf{p}'',s''}\left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}'',s''}(E'')\right\rangle\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}'',s''}(E'')\,|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\ &= \left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|\mathbb{I}-\Lambda\left|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle = \left\langle \Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Psi^{+}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle, \qquad (36)\end{aligned}$$

onde usamos as Eqs. (33), (34) e (35). Das Eqs. (26) e (36), vemos que

$$S^{\dagger}S = \mathbb{I}. \qquad (37)$$

Agora, façamos:

$$\begin{aligned}\left[SS^{\dagger}\right]_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \sum_{\mathbf{p}'',s''} S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p}'',s''}S^{\dagger}_{\mathbf{p}'',s'';\mathbf{p},s} = \sum_{\mathbf{p}'',s''} S_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p}'',s''}S^{*}_{\mathbf{p},s;\mathbf{p}'',s''} \\ &= \sum_{\mathbf{p}'',s''}\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Psi^{+}_{\mathbf{p}'',s''}(E'')\right\rangle\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\,|\Psi^{+}_{\mathbf{p}'',s''}(E'')\right\rangle^{*},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left[SS^{\dagger}\right]_{\mathbf{p}',s';\mathbf{p},s} &= \sum_{\mathbf{p}'',s''}\left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Psi^{+}_{\mathbf{p}'',s''}(E'')\right\rangle\left\langle \Psi^{+}_{\mathbf{p}'',s''}(E'')\,|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle \\ &= \left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\right|\mathbb{I}-\Lambda\left|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle = \left\langle \Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}}',s'}(E')\,|\Psi^{-}_{\hat{\mathbf{p}},s}(E)\right\rangle, \qquad (38)\end{aligned}$$

onde usamos as Eqs. (33), (34) e (35). Das Eqs. (32) e (38), concluímos que

$$SS^{\dagger} = \mathbb{I}. \qquad (39)$$

As Eqs. (37) e (39) mostram a unitariedade da matriz S :

$$S^{\dagger}S = SS^{\dagger} = \mathbb{I}. \qquad (40)$$