Limites muito convenientes

Em uma postagem recente, Medida fraca e espalhamento - Parte 1: o estado inicial, mencionei que estou fazendo uma pesquisa envolvendo as chamadas medidas fracas e a teoria quântica de colisões. Fazia um bom número de anos que eu não trabalhava com espalhamento e, então, estou fazendo uma bela recapitulação desse assunto. Chega um momento na teoria quântica de espalhamento quando precisamos provar que o estado quântico inicial da partícula colidente pode ser descrito, assintoticamente, tanto por uma combinação linear de estados de ondas planas, como pela mesma combinação linear, com os mesmos coeficientes, mas dos correspondentes estados de espalhamento, ao invés dos de ondas planas. Aqui não vou entrar em detalhes desses conceitos, pois logo publicarei outra postagem dando continuidade à que mencionei acima. Só vou dizer que, com a expressão, "assintoticamente", estou me referindo à região muito distante do alvo da colisão, onde o estado inicial da partícula colidente é preparado em um tempo remoto no passado, antes da colisão, de forma que a influência do alvo sobre a partícula, lá, é desprezível. Enfim, para provar esse fato, podemos recorrer, por exemplo, ao que está feito, de forma bem intuitiva, no livro Quantum Mechanics, de Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Franck Laloe. No entanto, a abordagem a esse resultado desse livro, embora muito didática, não é compacta e elegante. Então, estive procurando uma maneira mais instantânea e, ao mesmo tempo, suficientemente rigorosa, de demonstrar esse resultado crucial. Confesso que fiquei travado nesse ponto por um longo tempo até descobrir uma maneira eficiente de demonstrar esse teorema. Para isso, descobri um conjunto de limites muito convenientes, mencionados no livro Advanced Quantum Theory: An Outline of the Fundamental Ideas, de Paul Roman, mas sem a demonstração, que o autor sugere que o leitor a faça usando o método dos resíduos para integrais de contorno no plano complexo. Ora, eu gosto muito desse tipo de integral, mas havia algumas sutilezas matemáticas no caso específico que estou investigando e decidi procurar por outra maneira de demonstrar os tais limites. De forma muito similar à da minha postagem, Uma relação útil para denominadores singulares, aqui vou demonstrar os seguintes limites:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\lim_{\eta\to0^+}\frac{\exp\left(i\omega t\right)}{\omega-i\eta} = \begin{cases}2\pi i\delta\left(\omega\right), & \text{quando } t\to+\infty\\ 0, & \text{quando } t\to-\infty\end{cases}. \qquad (1)$$

Note que podemos escrever, para qualquer função f da variável ω, integrável no intervalo $[a,b]$:

$$\begin{aligned}\int_a^b d\omega f\left(\omega\right) i\int_{-\infty}^t dt'\,\exp\left(i\omega t'\right) &= \\ \lim_{\eta\to0^+}\int_a^b d\omega\, f\left(\omega\right)\left[i\int_{-\infty}^t dt'\,\exp\left(-\eta t+\eta t'+i\omega t'\right)\right] &= \\ \lim_{\eta\to0^+}\int_a^b d\omega\, f\left(\omega\right)\left\{i\exp\left(-\eta t\right)\int_{-\infty}^t dt'\,\exp\left[i\left(\omega-i\eta\right)t'\right]\right\}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Ora, é muito simples fazer a integral em t' :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} dt' \, \exp\left[i\left(\omega - i\eta\right)t'\right] &= \left.\frac{\exp\left[i\left(\omega - i\eta\right)t'\right]}{i\left(\omega - i\eta\right)}\right|_{-\infty}^{t} \\ &= \frac{\exp\left[i\left(\omega - i\eta\right)t\right]}{i\left(\omega - i\eta\right)}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Colocando o resultado da Eq. (3) de volta na Eq. (2), dá

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} d\omega f\left(\omega\right) i \int_{-\infty}^{t} dt' \, \exp\left(i\omega t'\right) &= \\ \lim_{\eta\to 0^{+}} \int_{a}^{b} d\omega \, f\left(\omega\right) \left\{ i \exp\left(-\eta t\right) \frac{\exp\left[i\left(\omega - i\eta\right)t\right]}{i\left(\omega - i\eta\right)} \right\} &= \\ \lim_{\eta\to 0^{+}} \int_{a}^{b} d\omega \, f\left(\omega\right) \left\{ i \exp\left(-\eta t\right) \frac{\exp\left(i\omega t + \eta t\right)}{i\left(\omega - i\eta\right)} \right\},\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{a}^{b} d\omega f\left(\omega\right) i \int_{-\infty}^{t} dt' \, \exp\left(i\omega t'\right) = \lim_{\eta\to 0^{+}} \int_{a}^{b} d\omega \, f\left(\omega\right) \frac{\exp\left(i\omega t\right)}{\omega - i\eta}. \qquad (4)$$

Sempre supondo que o limite da Eq. (1) se refere a uma operação feita dentro de uma integral como a da Eq. (4), envolvendo o produto do limite por uma função integrável arbitrária, $f\left(\omega\right)$, podemos abusar um pouco da notação e concluir, da Eq. (4), que

$$i \int_{-\infty}^{t} dt' \, \exp\left(i\omega t'\right) = \lim_{\eta\to 0^{+}} \frac{\exp\left(i\omega t\right)}{\omega - i\eta}, \qquad (5)$$

dada a arbitrariedade de f. Então, o limite que procuramos, Eq. (1), é obtido através da Eq. (5):

$$\lim_{t\to\pm\infty} \lim_{\eta\to 0^{+}} \frac{\exp\left(i\omega t\right)}{\omega - i\eta} = \lim_{t\to\pm\infty} i \int_{-\infty}^{t} dt' \, \exp\left(i\omega t'\right). \qquad (6)$$

Quando $t \to +\infty$, a Eq. (6) fornece

$$\lim_{t\to+\infty} \lim_{\eta\to 0^{+}} \frac{\exp\left(i\omega t\right)}{\omega - i\eta} = i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \exp\left(i\omega t'\right). \qquad (7)$$

Mas, recorde-se da representação integral da função delta de Dirac:

$$\delta\left(\omega\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \exp\left(i\omega t'\right). \qquad (8)$$

A substituição da Eq. (8) na Eq. (7) resulta no primeiro dos limites apresentados na Eq. (1):

$$\lim_{t\to+\infty} \lim_{\eta\to 0^{+}} \frac{\exp\left(i\omega t\right)}{\omega - i\eta} = 2\pi i \delta\left(\omega\right). \qquad (9)$$

Quando $t \to -\infty$, a Eq. (6) mostra que

$$\lim_{t\to-\infty}\lim_{\eta\to0^+}\frac{\exp(i\omega t)}{\omega - i\eta} = i\int_{-\infty}^{-\infty} dt'\,\exp(i\omega t') = 0, \qquad (10)$$

que é o segundo limite da Eq. (1).

Analogamente ao que foi feito acima, podemos também calcular:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\pm\infty}\lim_{\eta\to0^+}\frac{\exp(i\omega t)}{\omega + i\eta} &= -\lim_{t\to\pm\infty}\lim_{\eta\to0^+} i\exp(\eta t)\int_{t}^{+\infty} dt'\,\exp[i(\omega + i\eta)t'] \\ &= -\lim_{t\to\pm\infty} i\int_{t}^{+\infty} dt'\,\exp(i\omega t'),\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\lim_{\eta\to0^+}\frac{\exp(i\omega t)}{\omega + i\eta} = \begin{cases} 0, & \text{quando } t \to +\infty \\ -2\pi i\delta(\omega), & \text{quando } t \to -\infty \end{cases}, \qquad (11)$$

que é o outro par de limites que aparece no livro do Paul Roman, mencionado acima. Note que, para chegar à Eq. (11), não usei as integrais sobre ω desses limites multiplicados pela função integrável f. No entanto, como acontece com a função delta de Dirac, que não é, na verdade, uma função, mas uma distribuição, sempre supomos estar operando com esses limites em um integrando envolvendo uma função integrável.