Seções de choque

Em geral, nos cursos básicos de graduação, quando colisões entre partículas são introduzidas, normalmente no contexto do problema de Rutherford, a relação entre a seção de choque de colisão e a probabilidade de haver colisão não fica explícita. Usualmente, também, nos cursos introdutórios não são mencionadas as colisões reativas, em que as partículas colidentes podem reagir durante sua interação colisional e produzir novas partículas, com propriedades diferentes das incidentes. Em suma, normalmente são tratadas somente as colisões elásticas entre partículas e o contexto de colisões inelásticas como contendo os casos reativos não é exibido. Aqui, com um exemplo simples, pretendo sanar essas deficiências introdutórias, tornando explícita a relação entre a seção de choque e a probabilidade de colisão.

Imagine que você está em órbita, em uma espaçonave, completamente imponderável, e está brincando com colisões entre duas bolinhas de gude. Nesse caso, você pode deixar uma bolinha paradinha com relação a você, flutuando no meio da cápsula, fazendo papel de alvo, enquanto você lança a outra bolinha em direção ao alvo. Antes da colisão, caso haja uma colisão, o centro da bolinha incidente segue uma trajetória retilínea, supondo que, como se espera, a massa da bolinha seja distribuída uniformemente. A Fig. 1 abaixo mostra, em azul, o plano normal ao prolongamento dessa trajetória retilínea, que contém o centro da bolinha alvo (vermelha). A Fig. 1 também mostra a bolinha incidente (verde) e seu vetor velocidade, $\mathbf{v}$, indicando sua trajetória retilínea antes de colidir, caso colida.

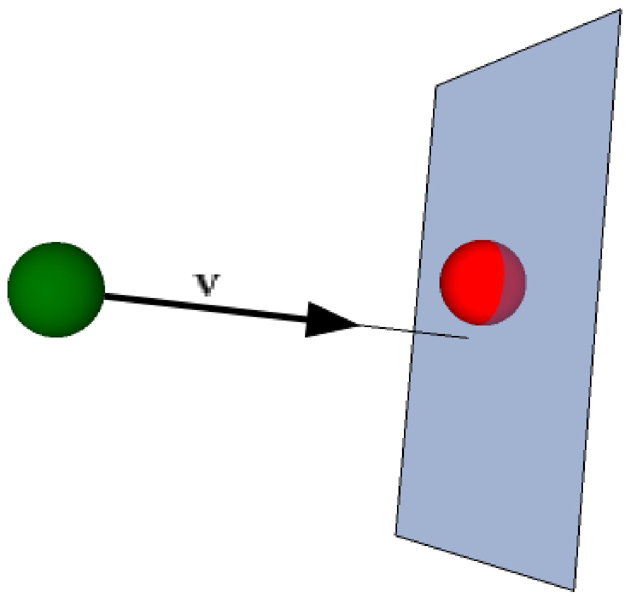

Figura 1: A bolinha incidente (verde) segue uma trajetória retilínia com vetor velocidade **v** antes de colidir, caso colida, com a bolinha alvo (vermelha). O plano azul é normal à velocidade da bolinha incidente e passa pelo centro da bolinha alvo.

Vamos supor que os raios das bolinhas sejam ambos iguais a R. É evidente, da Fig. 1, que só pode haver colisão caso o centro da bolinha alvo (vermelha) esteja a uma distância menor do que $2R$ do ponto de interseção entre o plano azul e a reta que contém a trajetória retilínea do centro da bolinha incidente (verde). Essa distância, não importa qual seja, é chamada de parâmetro de impacto da colisão. No presente exemplo, se o parâmetro de impacto for maior do que $2R$, então não haverá colisão. Caso o parâmetro de impacto seja menor do que $2R$, a colisão ocorrerá.

Assim, para haver colisão entre essas duas bolinhas, o ponto de interseção entre a reta contendo a trajetória inicial da bolinha incidente (verde) e o plano azul deverá estar em uma região desse plano azul que é um círculo de raio $2R$ em torno do centro da bolinha alvo (vermelha). A área dessa região, chamada de seção de choque transversal, ou, simplesmente, seção de choque, é, portanto,

$$\sigma = \pi (2R)^2 = 4\pi R^2. \qquad (1)$$

Dizemos, nesse caso, que a seção de choque para a colisão entre as duas bolinhas de gude, verde e vermelha, é dada pela Eq. (1). Veja que especificar que a seção de choque é para essas duas bolinhas é importante, pois, caso a bolinha incidente não tivesse o mesmo raio R, então a seção de choque mudaria. Por exemplo, se o raio da bolinha incidente fosse $r < R$, a seção de choque seria dada por

$$\sigma' = \pi (r + R)^2 . \qquad (2)$$

No limite em que o raio da bolinha incidente se torna desprezível com relação ao raio da bolinha alvo, isto é,

$$r \ll R,$$

a seção de choque torna-se apenas

$$\sigma'' = \pi R^2, \qquad (3)$$

que é o tipico resultado para a colisão clássica com a esfera rígida. Os livros-texto, quando tratam da seção de choque clássica do espalhamento por uma esfera dura, usualmente consideram apenas o caso em que o raio da partícula incidente é nulo e oferecem a Eq. (3) como resultado.

A esta altura você pode estar se perguntando qual a utilidade da seção de choque. Para esse caso simples é só isso que apresentei. No entanto, há situações mais complicadas, como no caso das colisões entre partículas α e núcleos de ouro. Esse problema foi tratado por Rutherford no início do séc. XX. Eu ilustrei esse tópico na postagem Espalhamento de Rutherford entre duas partículas.

Mesmo no caso mais simples acima, das duas bolinhas, uma verde e outra vermelha, a seção de choque é proporcional à probabilidade de uma colisão. Por exemplo, suponha que, ao invés de uma só bolinha alvo, você tenha n bolinhas vermelhas por unidade de volume, em uma região plana de espessura s. Considere, também, o caso em que essas bolinhas estejam muito espaçadas umas das outras, de forma que uma bolinha incidente, ao passar pela região das bolinhas vermelhas, tenha pouca chance de colidir com mais do que uma delas. Nesse caso, como acabei de mencionar, a seção de choque é proporcional à probabilidade de haver colisão entre uma bolinha verde e outra vermelha. Para ver isso, considere que as bolinhas verdes incidam na região das bolinhas vermelhas vindo em um feixe incidente de área transversal A.

Um feixe de bolinhas pode ser pensado como o local geométrico por onde as bolinhas incidentes podem passar. Note que o feixe incidente não é definido pelas bolinhas passando, mas, sim, pela região por onde elas têm possibilidade de passar. A definição de feixe incidente é análoga à de uma rodovia, por onde os automóveis passam: a rodovia é definida, não pela passagem dos automóveis, mas pela região onde a passagem dos automóveis é permitida. Assim, um feixe atômico, por exemplo, pode ser feito deixando-se um orifício de um recipiente cheio de gás aberto para um tubo fino, que colima o feixe e, portanto, permite apenas que átomos ou moléculas do gás com certa distribuição de velocidades possam passar. Na extremidade final do tubo colimador, os átomos ou moléculas saem dentro de uma região que foi delimitada pela montagem experimental, que definiu o lugar geométrico por onde podem passar os átomos ou moléculas.

Agora que expliquei o que é um feixe de bolinhas incidentes, pense, para simplificar, que todas as bolinhas verdes vêm com o mesmo vetor velocidade, todas paralelas dentro do feixe. Queremos calcular a probabilidade de uma bolinha verde qualquer colidir com alguma bolinha vermelha. A área transversal total disponível para as bolinhas incidentes é, como eu já mencionei, A. Assim, como na rodovia há a probabilidade de um automóvel vir por qualquer uma das faixas de trânsito, uma bolinha incidente pode incidir sobre a camada alvo vindo de qualquer trajetória retilínea permitida dentro do feixe incidente, ortogonal à área transversal A. O número total de bolinhas vermelhas disponíveis para colisão com uma bolinha verde incidente qualquer é, portanto, nsA, já que há n bolinhas vermelhas por unidade de volume e o volume obtido pela interseção do feixe incidente com a camada de bolinhas alvo é sA. Há, então, nsA oportunidades para a bolinha incidente colidir, desde que cruze a seção de choque de uma dessas nsA bolinhas vermelhas. Logo, a área transversal disponível para haver colisão é $nsA\sigma$, supondo que as bolinhas estejam tão espaçadas que a seção de choque transversal de uma não fica eclipsada pela seção de choque transversal de outra. Como a bolinha incidente pode vir com qualquer trajetória retilínea passando ortogonalmente pela área transversal A do feixe incidente, a probabilidade de uma colisão é dada pela área favorável à colisão, isto é, $nsA\sigma$, dividida pela área total A, ou seja, a probabilidade de colisão é dada por $ns\sigma$. Vemos, assim, que a seção de choque σ é proporcional à probabilidade de colisão entre uma bolinha verde e outra vermelha.

Suponha agora que as bolinhas tenham a propriedade de, às vezes, trocarem de cores entre si quando colidem, mas só quando colidem. Suponha ainda que a probabilidade das bolinhas trocarem suas cores, uma vez que tenham colidido, seja μ. Isto é, a probabilidade μ está condicionada à ocorrência da colisão e, portanto, é uma probabilidade condicional: dado que haja colisão, a probabilidade de trocar de cores é μ. Assim, depois de um número N de colisões, em μN dessas colisões haverá troca de cores entre as bolinhas, em média. Ora, como elas só podem trocar suas cores quando colidem, a probabilidade absoluta para trocarem suas cores é o produto da probabilidade de colidirem e da probabilidade μ, isto é, a probabilidade de trocarem cores entre si é $ns\mu\sigma$. Dessa forma, as colisões de troca se passam de maneira análoga às do parágrafo anterior, mas com uma seção de choque para troca de cores dada por $\sigma_t = \mu\sigma$.

Considere outro exemplo: as bolinhas só podem trocar de cores, com probabilidade condicional μ, caso colidam com parâmetro de impacto menor ou igual a $2a$, onde $a < R$. Nesse caso, a seção de choque para troca de cores fica diferente da do parágrafo anterior, pois, ao invés de $\sigma_t = \mu\sigma$, com σ dada pela Eq. (1), agora a seção de choque para troca de cores fica $\sigma_t' = \mu\tilde{\sigma}$, onde $\tilde{\sigma} = 4\pi a^2$. Note que, com certeza, não há troca de cores para colisões que ocorrem com parâmetros de impacto entre $2a$ e $2R$, região esta correspondente a uma seção de choque dada por $\tilde{\tilde{\sigma}} = 4\pi \left(R^2 - a^2\right)$, que corresponde à área de um ânulo representado na Fig. 2 abaixo. A probabilidade desse tipo de colisão sem troca de cores é dada, portanto, por $sA\tilde{\tilde{\sigma}}$.

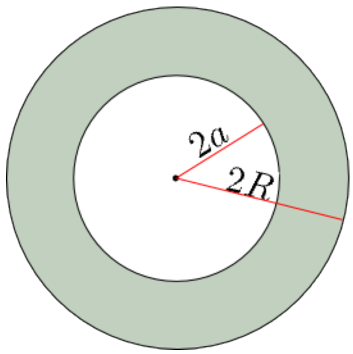

Figura 2: O ânulo, em azul, tem área $4\pi \left(R^2 - a^2\right)$ e representa a região de parâmetros de impacto para que, com certeza, não haja troca de cores no caso do exemplo acima.

Também pode não haver troca de cores para colisões com parâmetros de impacto menores do que $2a$, mas com a probabilidade condicional $1 - \mu$ e seção de choque $\tilde{\sigma} = 4\pi a^2$. Dessa forma, a probabilidade desse tipo de colisão é dada por $sA\,(1 - \mu)\,\tilde{\sigma}$. A probabilidade total para não haver troca de cores entre as bolinhas colidentes é a soma das probabilidades para os dois tipos de colisões sem troca de cores, isto é, $sA\tilde{\tilde{\sigma}} + sA\,(1 - \mu)\,\tilde{\sigma}$. Dividindo esse resultado por sA, dá a correspondente seção de choque para não haver troca de cores, σ_{nt}, embora haja colisão. Assim, σ_{nt} é, portanto, a soma das seções de choque dessas duas outras possíveis colisões, isto é,

$$\sigma_{nt} = \tilde{\tilde{\sigma}} + (1 - \mu)\,\tilde{\sigma} = 4\pi \left(R^2 - a^2\right) + 4\pi\,(1 - \mu)\,a^2,$$

ou seja,

$$\sigma_{nt} = 4\pi \left(R^2 - a^2 + a^2 - \mu a^2\right) = 4\pi \left(R^2 - \mu a^2\right). \qquad (4)$$

Outro ponto a ser notado é que as bolinhas poderiam, ao colidirem, ter a possibilidade de se transformarem em outras bolinhas diferentes, com raios, cores e massas distintos daqueles das bolinhas originais. Nesse caso, também teríamos seções de choque incorporando a probabilidade dessa transformação. Esse tipo de colisão reativa de fato ocorre em colisões moleculares, atômicas e nucleares, quando há reações químicas ou nucleares. Por exemplo, um núcleo de deutério, que é composto por um próton e um nêutron, pode se chocar com um núcleo de trítio, composto por um próton e dois nêutrons, resultando em um núcleo de hélio e um nêutron livre, onde o núcleo de hélio é composto por dois prótons e dois nêutrons. Essa é a famosa reação de fusão nuclear que está atualmente sendo estudada para produção de energia. Mas esse é um assunto para postagens futuras.

Referências

[1] Nuclear Reactions. Some Basics, por Demetrius J. Margaziotis.
[2] Keith R. Symon, Mechanics , terceira edição (Addison Wesley, 1971).