

Seção de choque diferencial

Em uma postagem anterior, Seções de choque, apresentei o conceito de seção de choque como sendo uma medida da probabilidade de colisão entre uma partícula incidente e uma partícula alvo. A seção de choque, embora tenha dimensão de área, pode ser vista como uma medida de probabilidade porque é, de fato, proporcional à probabilidade de colisão. Mostrei que no caso de termos uma camada de partículas alvo de espessura s , com n partículas alvo por unidade de volume, a probabilidade de colisão com uma partícula incidente é dada por

$$P = ns\sigma, \quad (1)$$

onde σ é a seção de choque específica para a colisão entre essas partículas, mesmo no caso em que essas partículas reagem. Embora o conceito de probabilidade seja muito útil, qual é a forma prática de medi-lo no laboratório? A resposta a essa questão explica por que os livros-texto, tipicamente, não definem seção de choque em termos de probabilidade de colisão, mas, sim, em termos de números de partículas detectadas e incidentes. Meu objetivo nesta postagem é fazer a conexão entre o conceito de seção de choque expresso na Eq. (1) acima e a definição usual dos livros-texto.

No laboratório, tipicamente, um feixe de partículas incidentes é caracterizado pela intensidade do feixe, I_0 , que é o número de partículas, por unidade de tempo e área, que incide sobre uma superfície transversal à direção de propagação do feixe. O número de partículas incidentes que penetra a camada de partículas alvo, de espessura s e área transversal ao feixe A , durante um intervalo de tempo Δt , é dado por

$$\Delta N_{inc} = I_0 A \Delta t. \quad (2)$$

Nem todas essas partículas sofrerão colisão com partículas alvo, já que há a probabilidade P , da Eq. (1), para que haja uma colisão por partícula incidente dentro da camada de partículas alvo. Assim, somente $P \cdot \Delta N_{inc}$ partículas incidentes colidem com partículas alvo. O número de colisões é, portanto,

$$\Delta N_{col} = P \cdot \Delta N_{inc} = ns\sigma I_0 A \Delta t, \quad (3)$$

onde já utilizei as Eqs. (1) e (2).

O número de colisões é medido com detectores que contam quantas partículas são espalhadas na colisão, por unidade de tempo. Aqui estou supondo que os detectores são ideais e, portanto, todas as colisões são detectadas, isto é, a eficiência da detecção é 100%. Assim, no laboratório a quantidade medida é $\Delta N_{col}/\Delta t$ e, da Eq. (3), segue que

$$\frac{\Delta N_{col}}{\Delta t} = (nsA) I_0 \sigma. \quad (4)$$

Agora, como há nsA partículas alvo na região de interação com o feixe incidente, da Eq. (4) segue que o número de colisões detectadas por partícula alvo, por

unidade de tempo, é dado por

$$\Phi_{det} = \frac{1}{nsA} \frac{\Delta N_{col}}{\Delta t} = I_0 \sigma. \quad (5)$$

A Eq. (5) mostra que a seção de choque é dada em termos do quociente entre o número de colisões detectadas por partícula alvo, por unidade de tempo, e a intensidade do feixe incidente:

$$\sigma = \frac{\Phi_{det}}{I_0}. \quad (6)$$

A Eq. (6) pode ser usada como a definição operacional de seção de choque, já que Φ_{det} e I_0 são quantidades diretamente mensuráveis no laboratório. Mas a Eq. (6) ainda não é a usual definição dos livros-textos, que normalmente define a seção de choque diferencial, como explico abaixo.

Em uma montagem experimental, normalmente não há detectores em todas as direções, continuamente distribuídos, em volta da região de interação entre as partículas colidentes. Tipicamente, o experimento é rodado repetidamente, cada vez com o detector em um ângulo diferente. Depois de cobrir todo o ângulo sólido em volta da região das colisões é que a seção de choque total é computada, através da soma das contagens parciais feitas ângulo a ângulo. Um detector, tipicamente, cobre um elemento de ângulo sólido, $d\Omega$, e o quociente do membro direito da Eq. (6) é computado dentro de cada elemento de ângulo sólido $d\Omega$, cada um centrado em uma direção do espaço definida pelos ângulos polares esféricos θ e φ . Aqui, o ângulo polar, θ , é definido como sendo o ângulo entre a direção das partículas detectadas e a direção do feixe incidente. Geralmente, também, as contagens não dependem do ângulo azimutal, φ , por simetria. Sendo assim, seja $d\Phi_{det}(\theta)$ o número de partículas detectadas por partícula alvo, por unidade de tempo, dentro do ângulo sólido $d\Omega$ do detector. A seção de choque diferencial, $d\sigma(\theta)/d\Omega$, é definida, então, em analogia à Eq. (6), por

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{d\Phi_{det}(\theta)}{I_0 d\Omega}, \quad (7)$$

que é a definição normalmente encontrada nos livros-texto [2]. A seguir apresento um exemplo simples do cálculo da seção de choque diferencial.

Considere uma partícula de raio desprezível que colide elasticamente com uma esfera rígida de raio R , que permanece sempre fixa no mesmo ponto com relação ao referencial do laboratório. Para calcularmos a seção de choque diferencial, de acordo com a discussão do parágrafo anterior, precisamos determinar quantas partículas, por esfera alvo, por unidade de tempo, são detectadas dentro de um dado ângulo sólido $d\Omega$. Vamos olhar para um particular ângulo sólido, que supomos ser aquele de um detector de partículas espalhadas do feixe incidente. Note que como as colisões são elásticas, então as partículas incidentes, após colidirem, apenas mudam de direção, mas com a mesma energia cinética que tinham antes da colisão, supondo, é claro, que a esfera rígida fique sempre fixa no mesmo ponto. Vou escolher um sistema de coordenadas tal que o feixe

incidente seja ao longo do sentido negativo do eixo z e que a esfera rígida esteja centrada na origem. A Fig. 1 abaixo ilustra o ângulo sólido $d\Omega$ coberto pelo detector, que deve estar posicionado a uma distância D que é muito maior do que o raio R da esfera alvo:

$$D \gg R.$$

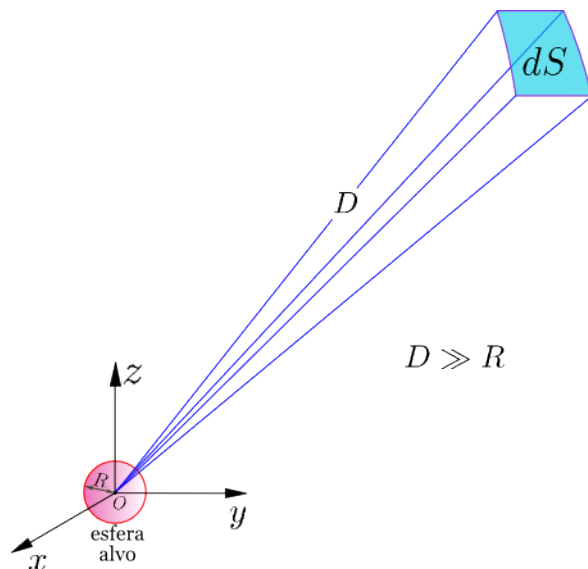


Figura 1: Área dS do detector.

Note que ao ângulo sólido $d\Omega$ corresponde um elemento de área do detector dado por

$$dS = D^2 d\Omega. \quad (8)$$

O detector, portanto, conta todas as partículas do feixe incidente que, após colidirem com a esfera rígida, são desviadas dentro do ângulo sólido $d\Omega$, em torno da direção espacial dada pelos ângulos θ e φ ilustrados na Fig. 2 abaixo. Então, o ângulo sólido $d\Omega$ pode ser escrito em termos de θ e φ como

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (9)$$

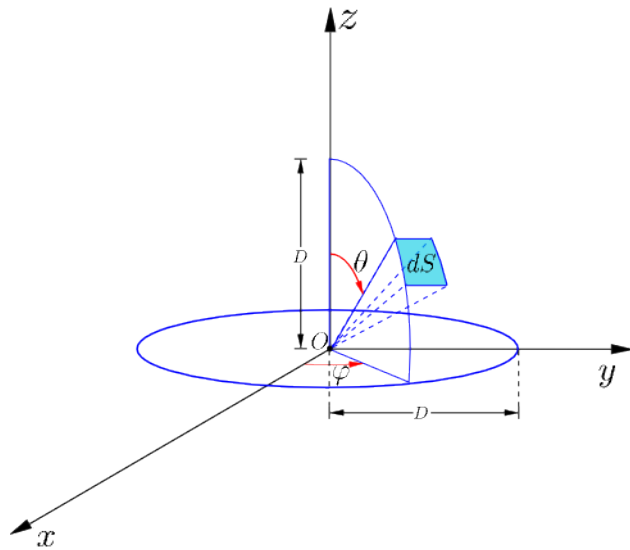


Figura 2: Os ângulos θ e φ que definem a direção espacial em torno da qual está o ângulo sólido $d\Omega$ do detector.

Assim, uma partícula incidente com trajetória paralela ao eixo z no sentido negativo, com sua trajetória à distância s do eixo z , incide sobre um ponto da esfera alvo e é refletida specularmente. Em outras palavras, a partícula é refletida de tal forma que o ângulo de incidência com a direção normal à superfície da esfera no ponto de incidência é igual ao ângulo da trajetória com a mesma direção normal depois da reflexão. Se a soma dos ângulos de incidência e reflexão, que são idênticos, for igual ao ângulo θ , então a partícula atingirá o detector e será contada, supondo, é claro, que a eficiência do detector seja 100%. A Fig. 3 abaixo ilustra essa situação para uma partícula incidente. Note que se a distância s mudar, o ângulo de reflexão mudará também.

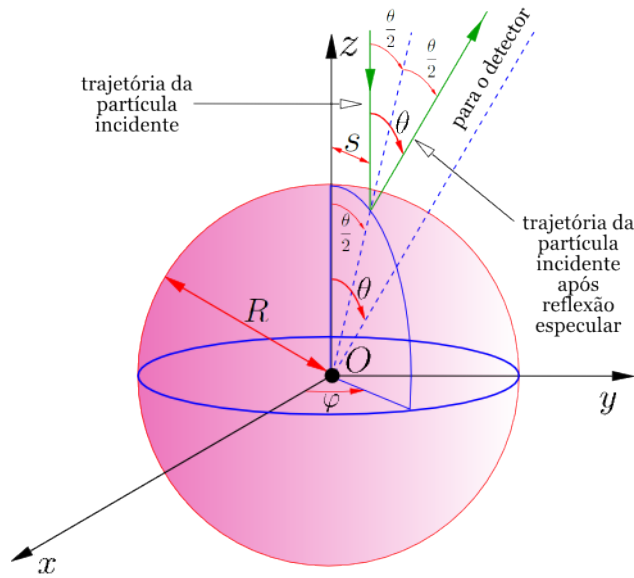


Figura 3: Trajetória de uma partícula incidente que é espalhada specularmente pela superfície da esfera rígida.

Fica claro da Fig. 3 que a relação entre o parâmetro de impacto s e o ângulo de espalhamento θ é dada por

$$s = R \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (10)$$

Como o feixe incidente é ao longo do sentido negativo do eixo z , então é como se as partículas incidentes estivessem “chovendo” verticalmente sobre a esfera da Fig. 3. A única porção do feixe incidente que realmente pode interagir com a esfera alvo é a que vem diretamente acima da esfera, que é uma porção cilíndrica do feixe incidente, de raio R , igual ao da esfera alvo, conforme ilustra a Fig. 4 abaixo.

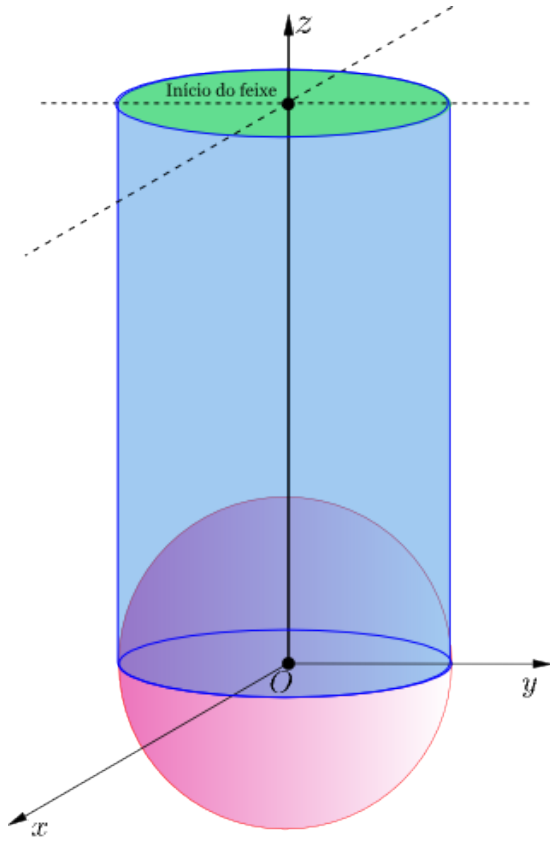


Figura 4: A porção do feixe incidente que efetivamente interage com a esfera alvo.

Para encontrarmos a seção de choque diferencial para as colisões com a esfera rígida, devemos calcular o número de partículas contadas pelo detector por unidade de tempo. Essas partículas são as recebidas dentro do elemento de ângulo sólido $d\Omega$ compreendido pela área dS do detector, que é ilustrada nas Figs. 1 e 2. As partículas espalhadas dentro dos intervalos $[\theta, \theta + d\theta]$ e $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ são as que o detector conta. Em termos do parâmetro de impacto s , essas são as partículas que incidem no intervalo $[s, s + ds]$, onde ds é dado pela diferencial da Eq. (10), isto é,

$$ds = \frac{R}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta, \quad (11)$$

e com ângulos azimutais também no intervalo $[\varphi, \varphi + d\varphi]$, conforme ilustra a Fig. 5 que segue.

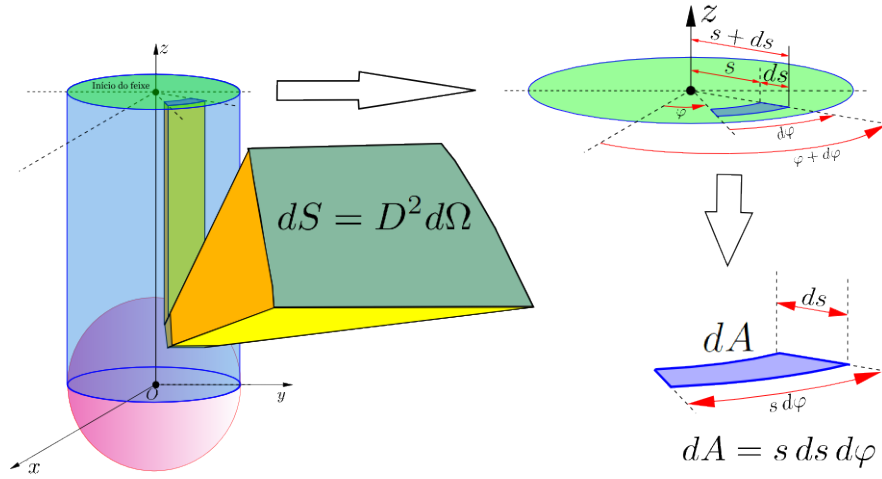


Figura 5: Elemento de área transversal dA do feixe incidente que, após o espalhamento, corresponde ao ângulo sólido $d\Omega$ do detector.

Note na Fig. 5 que o elemento de área transversal, dA , do feixe incidente que corresponde, após o espalhamento, ao ângulo sólido $d\Omega$ do detector é dado por

$$dA = s ds d\varphi. \quad (12)$$

O número de partículas que passa pelo elemento de área dA por unidade de tempo é, portanto, dado por

$$d\Phi_{det}(\theta) = I_0 dA, \quad (13)$$

já identificando esse número como o de partículas detectadas por unidade de tempo pelo detector. Das Eqs. (10), (11), (12) e (13) segue que

$$\begin{aligned} d\Phi_{det}(\theta) &= I_0 R \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{R}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta d\varphi \\ &= \frac{I_0 R^2}{2} \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

isto é,

$$d\Phi_{det}(\theta) = \frac{I_0 R^2}{4} \text{sen} \theta d\theta d\varphi. \quad (14)$$

Substituindo a Eq. (14) na Eq. (7) resulta na seção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{R^2 \text{sen} \theta d\theta d\varphi}{4 d\Omega}. \quad (15)$$

Substituindo a Eq. (9) na Eq. (15) dá

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{R^2 \text{sen} \theta d\theta d\varphi}{4 \text{sen} \theta d\theta d\varphi},$$

isto é,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}. \quad (15)$$

Note, finalmente, que a integral sobre todo o ângulo sólido de 4π da Eq. (15) resulta na seção de choque total clássica para a esfera rígida:

$$\oint_{4\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = \pi R^2, \quad (16)$$

conforme eu já havia calculado na postagem Seções de choque.

Referências

- [1] Nuclear Reactions. Some Basics, por Demetrius J. Margaziotis.
- [2] Keith R. Symon, Mechanics , terceira edição (Addison Wesley, 1971).