Modelo binomial para precificação de opções

Há uma outra forma de deduzir o preço de opções de compra do tipo europeu, seguindo as premissas de Black, Scholes e Merton, que é através de um modelo bem intuitivo chamado de modelo binomial. Esse modelo serve de base para a precificação de outros tipos de opções. Aqui, no entanto, estaremos vendo como obter o resultado já consagrado da fórmula de Black e Scholes.

Seja q a probabilidade neutra ao risco de que o ativo suba e $(1-q)$, a de que desça. Seja S o preço do ativo em um certo tempo. Seja $u > 1$ o fator de subida de S, isto é, $u \cdot S$ é o preço final se o preço do ativo subir. Seja $0 < d < 1$ o fator de descida, isto é, $d \cdot S$ é o preço final se o preço do ativo descer. Seja τ o tamanho do passo temporal. Após um desses passos temporais, partindo do preço S, o ativo deve ter um valor esperado igual ao que seria obtido investindo o mesmo valor à taxa livre de risco, para termos a probabilidade neutra ao risco:

$$qSu + (1-q)\,Sd = \exp(r\tau)\,S,$$

isto é,

$$qu + (1-q)\,d = \exp(r\tau)\,,$$

ou seja,

$$q = \frac{\exp(r\tau) - d}{u - d}.$$

Seja,

$$X_u = \frac{S_u}{S} = u,$$

e

$$X_d = \frac{S_d}{S} = d.$$

Então, o valor esperado de X é dado por

$$E(X) = qu + (1-q)\,d$$

A variância de X dá

$$E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = qu^2 + (1-q)\,d^2 - [qu + (1-q)\,d]^2\,.$$

Mas,

$$E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \sigma^2\tau$$

e, portanto,

$$qu^2 + (1-q)\,d^2 - [qu + (1-q)\,d]^2 = \sigma^2\tau.$$

Vamos supor que

$$d = \frac{1}{u}.$$

Nesse caso,

$$q = \frac{u\exp(r\tau) - 1}{u^2 - 1}$$

e

$$qu^4 + (1-q) - \left[qu^2 + (1-q)\right]^2 = \sigma^2\tau u^2,$$

isto é,

$$qu^4 + (1-q) - q^2u^4 - 2q(1-q)u^2 - (1-q)^2 = \sigma^2\tau u^2,$$

ou seja,

$$q(1-q)\left(u^4 - 2u^2 + 1\right) = \sigma^2\tau u^2,$$

ou ainda,

$$q(1-q)\left(u^2 - 1\right)^2 = \sigma^2\tau u^2.$$

Temos:

$$\left[q\left(u^2-1\right)\right]\left[(1-q)\left(u^2-1\right)\right] = \sigma^2\tau u^2,$$

isto é,

$$\left[u\exp(r\tau) - 1\right]\left[(1-q)\left(u^2-1\right)\right] = \sigma^2\tau u^2.$$

Mas,

$$(1-q)\left(u^2-1\right) = u^2 - u\exp(r\tau)$$

e, portanto,

$$\left[u\exp(r\tau) - 1\right]\left[u^2 - u\exp(r\tau)\right] = \sigma^2\tau u^2,$$

isto é,

$$\left[u\exp(r\tau) - 1\right]\left[u - \exp(r\tau)\right] = \sigma^2\tau u.$$

Logo,

$$u^2\exp(r\tau) - u\exp(2r\tau) - u + \exp(r\tau) = \sigma^2\tau u,$$

isto é,

$$u^2\exp(r\tau) - u\left[1 + \exp(2r\tau) + \sigma^2\tau\right] + \exp(r\tau) = 0,$$

ou seja,

$$u^2 - u\left[\exp(r\tau) + \left(1+\sigma^2\tau\right)\exp(-r\tau)\right] + 1 \quad = \quad 0.$$

Seja,

$$f(\tau) \quad = \quad \exp(r\tau) + \left(1+\sigma^2\tau\right)\exp(-r\tau).$$

Assim,

$$u^2 - f(\tau)\,u + 1 \quad = \quad 0.$$

A solução para u fica, então,

$$u \quad = \quad \frac{f(\tau) \pm \sqrt{[f(\tau)]^2 - 4}}{2}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
[f(\tau)]^2 \quad &= \quad \left[\exp(r\tau) + \left(1+\sigma^2\tau\right)\exp(-r\tau)\right]^2 \\
&= \quad \exp(2r\tau) + 2\left(1+\sigma^2\tau\right) + \left(1+\sigma^2\tau\right)^2\exp(-2r\tau).
\end{aligned}$$

Para primeira ordem em τ, segue

$$\begin{aligned}
[f(\tau)]^2 \quad &\approx \quad 1 + 2r\tau + 2\left(1+\sigma^2\tau\right) + \left(1+2\sigma^2\tau\right)(1-2r\tau) \\
&\approx \quad 1 + 2r\tau + 2\left(1+\sigma^2\tau\right) + 1 - 2r\tau + 2\sigma^2\tau \approx 4 + 4\sigma^2\tau
\end{aligned}$$

e

$$f(\tau) \quad \approx \quad 1 + r\tau + \left(1+\sigma^2\tau\right)(1-r\tau) \approx 1 + r\tau + 1 - r\tau + \sigma^2\tau = 2 + \sigma^2\tau.$$

Logo,

$$u \quad \approx \quad \frac{2 + \sigma^2\tau \pm \sqrt{4 + 4\sigma^2\tau - 4}}{2},$$

isto é,

$$u \quad \approx \quad \frac{2 + \sigma^2\tau \pm 2\sigma\sqrt{\tau}}{2},$$

ou seja,

$$u \quad \approx \quad 1 + \frac{\sigma^2\tau}{2} \pm \sigma\sqrt{\tau} \approx \exp\left(\pm\sigma\sqrt{\tau}\right).$$

Como $u > 1$, segue que

$$u \quad \approx \quad \exp\left(\sigma\sqrt{\tau}\right).$$

Black e Scholes

Seja N o número de passos temporais e seja n o número de subidas. No final do período de duração $N\tau$, após esses N passos temporais de duração τ cada um, o preço da ação será

$$S_f = u^n d^{N-d} S.$$

O preço da opção no tempo $N\tau$ será, portanto,

$$C_n = \max\left(u^n d^{N-d} S - K, 0\right),$$

se houver n subidas. O valor esperado da opção é dado por

$$C(N\tau) = \sum_{n=0}^{N} p_n C_n,$$

onde p_n é a probabilidade para n subidas. Calculemos p_n. De quantas maneiras podem ocorrer n subidas? Simples:

$$\frac{N!}{n!\,(N-n)!}.$$

Qual a probabilidade para cada uma dessas maneiras? Simples também:

$$q^n (1-q)^{N-n}.$$

Portanto,

$$p_n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n}.$$

Logo,

$$C(N\tau) = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n} \max\left(u^n d^{N-d} S - K, 0\right).$$

No tempo inicial, o valor da opção deve ser o final descontado pela taxa livre de risco e o resultado dá

$$C(0) = \exp(-Nr\tau) \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n} \max\left(u^n d^{N-n} S - K, 0\right).$$

Deve haver um número $p < N$ a partir do qual

$$u^p d^{N-p} S - K \geqslant 0,$$

isto é,

$$u^p d^N d^{-p} S \geqslant K,$$

ou seja,

$$\left(\frac{u}{d}\right)^p \quad \geqslant \quad \frac{K}{Sd^N}.$$

Assim,

$$p\ln\left(\frac{u}{d}\right) \quad \geqslant \quad \ln\left(\frac{K}{Sd^N}\right),$$

isto é,

$$p \quad \geqslant \quad \frac{\ln\left(\frac{K}{Sd^N}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}.$$

Portanto,

$$C(0) \quad = \quad \exp(-Nr\tau)\sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}\left(u^n d^{N-n}S-K\right),$$

isto é,

$$\begin{aligned} C(0) \quad &= \quad \exp(-Nr\tau)\sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}u^n d^{N-n}S \\ &- \quad \exp(-Nr\tau)\sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}K, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C(0) \quad &= \quad S\sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}u^n d^{N-n}\exp(-Nr\tau) \\ &- \quad \exp(-Nr\tau)K\sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}. \end{aligned}$$

Para simplificar essa expressão, sejam

$$\Phi(p,N,q) \quad = \quad \sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}$$

e

$$q' \quad = \quad qu\exp(-r\tau).$$

Então,

$$\sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}u^n d^{N-n}\exp(-Nr\tau) \quad = \quad \sum_{n=p}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q'^n(1-q)^{N-n}\left[d\exp(-r\tau)\right]^{N-n}.$$

Note que, porque

$$q = \frac{\exp(r\tau) - d}{u - d},$$

segue que

$$1 - q = 1 - \frac{\exp(r\tau) - d}{u - d} = \frac{u - \exp(r\tau)}{u - d}.$$

Note também que

$$1 - q' = 1 - \left(\frac{\exp(r\tau) - d}{u - d}\right) u \exp(-r\tau) = 1 - \frac{u - ud\exp(-r\tau)}{u - d} = \frac{-d + ud\exp(-r\tau)}{u - d},$$

isto é,

$$1 - q' = d\frac{u\exp(-r\tau) - 1}{u - d} = d\exp(-r\tau)\,\frac{u - \exp(r\tau)}{u - d}.$$

Logo,

$$1 - q' = (1 - q)\, d\exp(-r\tau).$$

Com isso,

$$\sum_{n=p}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n} u^n d^{N-n} \exp(-Nr\tau) = \sum_{n=p}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q'^n \left[(1-q)\, d\exp(-r\tau)\right]^{N-n}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=p}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n} u^n d^{N-n} \exp(-Nr\tau) = \sum_{n=p}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q'^n (1-q')^{N-n} = \Phi(p, N, q').$$

Assim, podemos escrever:

$$C(0) = S\Phi(p, N, q') - \exp(-Nr\tau)\, K\Phi(p, N, q).$$

Seja

$$t = N\tau.$$

Então,

$$C(0) = S\Phi(p, N, q') - \exp(-rt)\, K\Phi(p, N, q).$$

Limite para tempo contínuo

Consideremos

$$\Phi(p,N,q) = \sum_{n=p}^{N} \frac{N!}{n!\,(N-n)!} q^n (1-q)^{N-n},$$

com

$$p \geqslant \frac{\ln\left(\frac{K}{Sd^N}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)},$$

onde

$$u \approx \exp\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)$$

e

$$d \approx \exp\left(-\sigma\sqrt{\tau}\right).$$

Também,

$$q = \frac{\exp(r\tau)-d}{u-d} \approx \frac{\exp(r\tau)-\exp(-\sigma\sqrt{\tau})}{\exp(\sigma\sqrt{\tau})-\exp(-\sigma\sqrt{\tau})}.$$

Mas,

$$\exp\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)-\exp\left(-\sigma\sqrt{\tau}\right) \approx 1+\frac{\sigma^2\tau}{2}+\sigma\sqrt{\tau}-1-\frac{\sigma^2\tau}{2}+\sigma\sqrt{\tau} = 2\sigma\sqrt{\tau}$$

e

$$\exp(r\tau)-\exp\left(-\sigma\sqrt{\tau}\right) \approx 1+r\tau-1-\frac{\sigma^2\tau}{2}+\sigma\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^3\tau\sqrt{\tau}}{6} = r\tau-\frac{\sigma^2\tau}{2}+\sigma\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^3\tau\sqrt{\tau}}{6}$$

Portanto,

$$q \approx \frac{r\tau-\frac{\sigma^2\tau}{2}+\sigma\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^3\tau\sqrt{\tau}}{6}}{2\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{r\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\sqrt{\tau}}{2}+\sigma+\frac{\sigma^3\tau}{6}}{2\sigma} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{12}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} q(1-q) &\approx \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{12}\right]\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{12}\right] \\ &= \frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{12}\right]^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$q(1-q) \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{4\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\tau.$$

Usando o teorema de de Moivre e Laplace,

$$\frac{N!}{n!\,(N-n)!}q^n\,(1-q)^{N-n} \quad \approx \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi Nq\,(1-q)}}\exp\left[-\frac{(n-Nq)^2}{2Nq\,(1-q)}\right],$$

obtemos

$$\Phi\,(p,N,q) \quad \approx \quad \sum_{n=p}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi Nq\,(1-q)}}\exp\left[-\frac{(n-Nq)^2}{2Nq\,(1-q)}\right].$$

Agora,

$$q \quad = \quad \frac{u\exp\,(r\tau)-1}{u^2-1} \approx \frac{\exp\,(\sigma\sqrt{\tau})\exp\,(r\tau)-1}{\exp\,(2\sigma\sqrt{\tau})-1}$$

e

$$q\,(1-q) \quad \approx \quad \left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}-\frac{\tau}{4\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2$$

Logo,

$$\Phi\,(p,N,q) \quad \approx \quad \int_p^\infty \frac{dn}{\sqrt{2\pi Nq\,(1-q)}}\exp\left[-\frac{(n-Nq)^2}{2Nq\,(1-q)}\right].$$

Seja

$$x \quad = \quad -\frac{n-Nq}{\sqrt{Nq\,(1-q)}}.$$

Então,

$$dx \quad = \quad -\frac{dn}{\sqrt{Nq\,(1-q)}}$$

e, portanto,

$$dn \quad = \quad -dx\sqrt{Nq\,(1-q)}.$$

Assim,

$$\Phi\,(p,N,q) \quad \approx \quad \int_{-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq(1-q)}}}^{-\infty}\frac{-dx\sqrt{Nq\,(1-q)}}{\sqrt{2\pi Nq\,(1-q)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq(1-q)}}} dx\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Mas,

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\,(1-q)}} \quad = \quad -\frac{\frac{\ln\left(\frac{K}{Sd^N}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}-Nq}{\sqrt{Nq\,(1-q)}} = -\frac{\frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right)+N\sigma\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{\tau}}-Nq}{\sqrt{Nq\,(1-q)}},$$

isto é,

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\left(1-q\right)}} \quad = \quad -\frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right)+N\sigma\sqrt{\tau}-Nq2\sigma\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{Nq\left(1-q\right)}},$$

ou seja,

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\left(1-q\right)}} \quad = \quad -\frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right)+N\sigma\sqrt{\tau}-N2\sigma\sqrt{\tau}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{12}\right]}{2\sigma\sqrt{N\tau}\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{12}\right]^2}},$$

ou ainda,

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\left(1-q\right)}} \quad = \quad -\frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right)+N\sigma\sqrt{\tau}-N\sigma\sqrt{\tau}\left[1+\frac{1}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{6}\right]}{\sigma\sqrt{N\tau}\sqrt{1-\left[\frac{1}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}+\frac{\sigma^2\tau}{6}\right]^2}}.$$

Então, até primeira ordem em τ e fazendo $N\tau = t$, obtemos

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\left(1-q\right)}} \quad = \quad -\frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right)-N\sigma\sqrt{\tau}\left[\frac{1}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\tau}\right]}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\tau}},$$

isto é,

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\left(1-q\right)}} \quad \approx \quad -\frac{-\ln\left(\frac{S}{K}\right)-t\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\tau}}.$$

No limite em que $N\to\infty$ e $\tau\to 0$, ficamos com

$$-\frac{p-Nq}{\sqrt{Nq\left(1-q\right)}} \quad \approx \quad \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+t\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{t}} = d_2.$$