A transformada de Fourier

Aqui apresento a noção de transformada de Fourier a partir de um processo limite da série de Fourier. A abordagem não é rigorosa, mas é muito intuitiva. Considere uma série de Fourier para uma função h de período 2π, que é a forma mais simples. Então, sabemos que podemos escrever

$$h(\theta) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \mathrm{sen}(n\theta) + b_n \cos(n\theta)\right], \qquad (1)$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, h(\varphi) \, \mathrm{sen}(n\varphi) \qquad (2)$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \, h(\varphi) \cos(n\varphi), \qquad (3)$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$. O caso mais geral de uma função $g(x)$ com período $T > 0$ também tem uma série de Fourier, que é obtida fazendo uma substituição de variável assim:

$$\theta = \frac{2\pi}{T} x.$$

Por quê? Simplesmente porque agora, quando você troca x por $x+T$, a variável θ muda para $\theta + 2\pi$, isto é,

$$\frac{2\pi}{T}(x+T) = \frac{2\pi}{T}x + \frac{2\pi}{T}T = \frac{2\pi}{T}x + 2\pi = \theta + 2\pi.$$

Então, com essa nova variável θ, podemos escrever

$$g(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}\theta\right)$$

e definir $h(\theta)$, com período 2π, como

$$h(\theta) = g\left(\frac{T}{2\pi}\theta\right) = g(x).$$

Também podemos escrever a função $g(x)$, de período T, em termos da função $h(\theta)$, de período 2π, como

$$g(x) = h\left(\frac{2\pi}{T}x\right). \qquad (4)$$

Note mais uma vez que, porque $h(\theta)$ tem período 2π,

$$g(x+T) = h\left(\frac{2\pi}{T}x + \frac{2\pi}{T}T\right) = h\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) = h\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = g(x), \qquad (5)$$

mostrando que $g(x)$ tem período T. Então, a série de Fourier para uma função qualquer de período T é dada pela Eq. (1), mas com a mudança de variável acima, isto é,

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \mathrm{sen}(k_n x) + b_n \cos(k_n x)\right], \tag{6}$$

onde

$$k_n = \frac{2\pi}{T} n, \tag{7}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} ds\, g(s)\, \mathrm{sen}(k_n s) \tag{8}$$

e

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} ds\, g(s) \cos(k_n s). \tag{9}$$

É importante ressaltar ainda mais uma vez que o que fiz acima foi apenas a substituição da variável θ, nas Eqs. (1), (2) e (3), por

$$\theta = \frac{2\pi}{T} x. \tag{10}$$

Podemos ainda escrever

$$\mathrm{sen}(k_n x) = \frac{\exp(ik_n x) - \exp(-ik_n x)}{2i} \tag{11}$$

e

$$\cos(k_n x) = \frac{\exp(ik_n x) + \exp(-ik_n x)}{2}. \tag{12}$$

Substituindo as Eqs. (11) e (12) na Eq. (6), obtemos

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{\exp(ik_n x) - \exp(-ik_n x)}{2i} + b_n \frac{\exp(ik_n x) + \exp(-ik_n x)}{2}\right],$$

isto é,

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2i}\right) \exp(ik_n x) + \left(\frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2i}\right) \exp(-ik_n x)\right],$$

ou seja,

$$g(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2i}\right) \exp(ik_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{2} - \frac{a_n}{2i}\right) \exp(-ik_n x). \tag{13}$$

Mas,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{2}-\frac{a_n}{2i}\right)\exp\left(-ik_nx\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b_{-n}}{2}-\frac{a_{-n}}{2i}\right)\exp\left(-ik_{-n}x\right). \qquad (14)$$

Da Eq. (7) segue que

$$k_{-n} = -\frac{2\pi}{T}n = -k_n. \qquad (15)$$

Das Eqs. (8) e (15) segue que

$$a_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\mathrm{sen}\left(k_{-n}s\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\mathrm{sen}\left(-k_ns\right) = -a_n. \qquad (16)$$

Das Eqs. (9) e (15) segue que

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\cos\left(k_{-n}s\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\cos\left(-k_ns\right) = b_n. \qquad (17)$$

Substituindo as Eqs. (15), (16) e (17) na Eq. (14), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{2}-\frac{a_n}{2i}\right)\exp\left(-ik_nx\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i}\right)\exp\left(ik_nx\right). \qquad (18)$$

Substituindo a Eq. (18) na Eq. (13), obtemos

$$g\left(x\right) = \frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i}\right)\exp\left(ik_nx\right)+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i}\right)\exp\left(ik_nx\right),$$

isto é,

$$g\left(x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i}\right)\exp\left(ik_nx\right), \qquad (19)$$

onde a soma inclui o termo para o qual $n=0$. Das Eqs. (8) e (9), segue que

$$\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\cos\left(k_ns\right)+\frac{1}{iT}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\mathrm{sen}\left(k_ns\right),$$

isto é,

$$\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\left[\cos\left(k_ns\right)-i\mathrm{sen}\left(k_ns\right)\right],$$

ou seja,

$$\frac{b_n}{2}+\frac{a_n}{2i} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ds\, g\left(s\right)\exp\left(-ik_ns\right). \qquad (20)$$

Substituindo a Eq. (20) na Eq. (19), obtemos

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} ds\, g(s) \exp\left[ik_n (x-s)\right]. \qquad (21)$$

O que acontece quando tomamos o limite em que T tende a valores infinitos? Nesse caso, a função g tende a uma função, que vou chamar de f, que tem período infinito, isto é, pode até não ter período algum. Você vê a generalidade desse caso? Note que T infinito não exclui a possibilidade de que a função f tenha um período finito, pois se ela tem um período finito, digamos τ, ela tem um múltiplo qualquer de τ como período também. Observe que, pela Eq. (7), quando o índice da soma, n, aumenta de uma unidade, o valor de k_n aumenta apenas $2\pi/T$, que tende a zero conforme T tende a valores infinitos. Seja, portanto,

$$\Delta k = \frac{2\pi}{T} \qquad (22)$$

a variação de k_n para uma unidade de variação do índice n. Então, a Eq. (22) fornece

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta k}{2\pi} \qquad (23)$$

e, substituindo a Eq. (23) na Eq. (21), obtemos

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta k \int_{-T/2}^{T/2} ds\, g(s) \exp\left[ik_n (x-s)\right]. \qquad (24)$$

Podemos entender o limite da Eq. (24) quando T tende a valores infinitos como sendo uma integral de Riemann sobre a variável real k, integrada desde $-\infty$ até $+\infty$. Para enxergar isso, note que a integral que aparece sobre a variável s na Eq. (24) é uma função de k_n, além de x e de T, que não vou explicitar para tornar o argumento a seguir mais claro, isto é,

$$G(k_n) = \int_{-T/2}^{T/2} ds\, g(s) \exp\left[ik_n (x-s)\right], \qquad (25)$$

e a Eq. (24) pode ser reescrita como

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(k_n)\, \Delta k. \qquad (26)$$

A soma da Eq. (26) pode ser interpretada como o resultado de particionar toda a reta real em intervalos regulares, cada um medindo Δk e delimitados pelos pontos k_n, indexados com n variando desde $-\infty$ até ∞, e somando todos os termos $G(k_n)\,\Delta k$ calculados nesses pontos. No limite em que Δk tende a zero e, portanto, T tende a valores infinitos, a soma da Eq. (26) tende a uma integral de Riemann:

$$\lim_{\Delta k \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(k_n)\,\Delta k \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\lim_{T\to\infty} G(k)\right], \qquad (27)$$

onde

$$\lim_{T\to\infty} G(k) \quad = \quad \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} ds\, g(s) \exp\left[ik(x-s)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, f(s) \exp\left[ik(x-s)\right], \qquad (28)$$

com a definição:

$$f(s) \quad = \quad \lim_{T\to\infty} g(s) \qquad (29)$$

ou, equivalentemente,

$$f(s) \quad = \quad \lim_{\Delta k\to 0} g(s)\,. \qquad (30)$$

Em virtude das Eqs. (27), (28), (29) e (30), o limite da Eq. (26) quando Δk tende a zero é dado por

$$f(x) \quad = \quad \lim_{\Delta k\to 0} g(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta k\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(k_n)\,\Delta k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\lim_{T\to\infty} G(k)\right],$$

isto é,

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, f(s) \exp\left[ik(x-s)\right] \right\},$$

ou seja,

$$f(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, f(s) \exp(-iks)\right] \exp(ikx)\,. \qquad (31)$$

Quando a Eq. (31) é válida, para uma função f, definimos a transformada de Fourier de f como a função da variável k escrita entre colchetes na Eq. (31), isto é,

$$\tilde{f}(k) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, f(s) \exp(-iks)\,. \qquad (32)$$

Então, substituindo a Eq. (32) na Eq. (31), obtemos

$$f(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \tilde{f}(k) \exp(ikx)\,, \qquad (33)$$

que é chamada de transformada de Fourier inversa.