Solução fundamental para a equação de Fokker-Planck unidimensional

A equação de Fokker-Planck para a densidade de probabilidade $u(x,t)$ da postagem O preço da bebedeira ou a bebedeira do preço? é dada por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

com μ e σ constantes reais. É fácil verificar que uma solução para a Eq. (1) é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right], \qquad (2)$$

para $t>0$. A Eq. (2) é chamada de solução fundamental da Eq. (1) porque tem como condição inicial a função delta de Dirac:

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \delta(x). \qquad (3)$$

O objetivo desta postagem é obter a Eq. (3) a partir da representação integral da função delta de Dirac.

Comecemos pela consideração de que a função delta de Dirac pode ser escrita em sua representação integral como

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp(ikx). \qquad (4)$$

Então, podemos escrever a Eq. (4) também da seguinte forma:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\eta\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp\left(-\eta k^2-ik\eta\lambda+ikx\right), \qquad (5)$$

onde λ é uma constante real qualquer. A integral no segundo membro da Eq. (5) também pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp\left(-\eta k^2-ik\eta\lambda+ikx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp\left[-\eta\left(k^2+ik\lambda-i\frac{kx}{\eta}\right)\right],$$

isto é, completando o quadrado no argumento da exponencial,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp\left(-\eta k^2-ik\eta\lambda+ikx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp\left[-\eta\left(k+i\frac{\lambda}{2}-i\frac{x}{2\eta}\right)^2+\eta\left(-i\frac{\lambda}{2}+i\frac{x}{2\eta}\right)^2\right],$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\exp\left(-\eta k^2-ik\eta\lambda+ikx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\exp\left[\eta\left(-i\frac{\lambda}{2}+i\frac{x}{2\eta}\right)^2\right],$$

ou ainda,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-\eta k^2 - ik\eta\lambda + ikx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} \exp\left[-\frac{(x-\lambda\eta)^2}{4\eta}\right]. \qquad (6)$$

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (5), obtemos

$$\delta(x) = \lim_{\eta\to 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta}} \exp\left[-\frac{(x-\lambda\eta)^2}{4\eta}\right] \right\}. \qquad (7)$$

Escolhendo

$$\eta = \frac{\sigma^2}{2} t, \qquad (8)$$

obtemos uma equação equivalente à Eq. (7), dada por

$$\delta(x) = \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{\left(x-\lambda\frac{\sigma^2}{2}t\right)^2}{2\sigma^2 t}\right] \right\}. \qquad (8)$$

Mas a constante λ pode ser escolhida como

$$\lambda = \frac{2\mu}{\sigma^2} \qquad (9)$$

e a Eq. (8) fica

$$\delta(x) = \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \right\}, \qquad (10)$$

que nada mais é do que a Eq. (3).