# A equação de Fokker e Planck para o movimento browniano

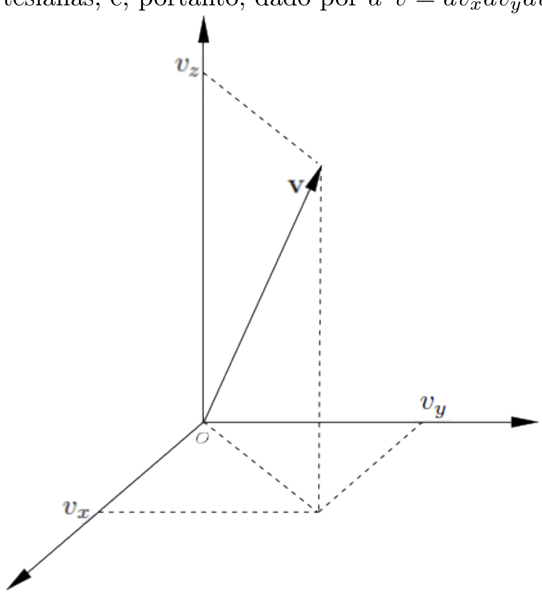
Exatamente no primeiro dia de setembro de 1930, um artigo escrito por George Eugene Uhlenbeck e Leonard Salomon Ornstein apareceu publicado na Physical Review com o título On the theory of the Brownian motion. Em particular, gostei da maneira cuidadosa com que deduzem a equação de Fokker e Planck. Para compartilhar meu achado, vou explicar os detalhes aqui, dentro do contexto de outras postagens que já apresentei sobre o fascinante tópico do movimento browniano.

Na postagem Coeficiente de difusão, apresentei a equação de Langevin para a velocidade da partícula que executa movimento browniano em suspensão na água:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_L(t) - \gamma\mathbf{v}, \qquad (1)$$

onde $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade da partícula de massa efetiva $m$, $\mathbf{F}_L(t)$ é a força que flutua no tempo, chamada de força de Langevin, produzida pelas colisões aleatórias com as moléculas de água e $\gamma > 0$ é a constante de proporcionalidade entre a força de resistência imposta pela água e a velocidade da partícula em suspensão. Também mencionei o cálculo da média da velocidade no ensemble das partículas em suspensão. Recapitulando, das partículas em suspensão, vamos considerar todas aquelas que tinham a mesma velocidade $\mathbf{v}_0$ em $t = 0$. Teremos uma Eq. (1) para cada uma dessas partículas e podemos, então, somar todas essas equações termo a termo e dividir tudo pelo número total dessas equações com a mesma condição inicial. O resultado dará a média de cada termo, no ensemble e não no tempo. A média no ensemble de uma função $A(\mathbf{v}, t)$, dada a condição inicial $\mathbf{v}_0$ em $t = 0$, é denotada como $\langle A(\mathbf{v}, t)\rangle_{\mathbf{v}_0}$.

Agora é hora de introduzir um espaço tridimensional um pouco diferente daquele mais comum, que descreve o espaço físico de três dimensões. Como a variável importante no presente contexto é a velocidade, $\mathbf{v}$, podemos pensar em usar um sistema de coordenadas ortogonal em que os eixos mostram as componentes do vetor $\mathbf{v}$, como ilustrado na figura abaixo. Um elemento infinitesimal de volume nesse espaço tridimensional, em coordenadas cartesianas, é, portanto, dado por $d^3v = dv_x dv_y dv_z$.




Considerando que o número de partículas em suspensão é macroscopicamente grande, podemos pensar na aproximação em que suas velocidades variam continuamente de partícula a partícula, em um meio contínuo de partículas em suspensão. Logo, temos um campo de velocidades e podemos pensar em uma distribuição de velocidades dada pela função $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$. Essa ideia é análoga à da distribuição de cargas elétricas em um material. Por exemplo, a densidade volumétrica de cargas é dada por uma função $\rho(\mathbf{r})$, que dá a carga no elemento de volume $d^3r = dxdydz$ quando multiplicada por ele, isto é,

$$dq = \rho(\mathbf{r})\, d^3r, \qquad (2)$$

onde o elemento de volume fica em torno do ponto $\mathbf{r}$. Se os portadores de carga no material são elétrons e se a carga eletrônica é dada por $-e$, então o número de elétrons por unidade de volume é dado pelo quociente $\rho(\mathbf{r}) / (-e)$. O número de elétrons no elemento de volume $d^3r$, localizado em torno do ponto $\mathbf{r}$, é dado por $d^3r\rho(\mathbf{r}) / (-e)$.

No nosso presente caso, vamos supor que temos $N$ partículas em suspensão, com $N$ um número muitíssimo grande, como no caso dos elétrons em um material dielétrico eletrizado. Desse total de partículas em suspensão, queremos o número delas que tinham, todas, a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$, no instante $t = 0$, e que têm seus vetores velocidade, no instante $t > 0$, dentro do volumezinho infinitesimal $d^3v = dv_x dv_y dv_z$, localizado em torno do vetor $\mathbf{v}$. Esse número é apenas uma fração do número total, $N$. Além disso, é uma função de $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}$ e $t$ e é proporcional ao volume $d^3v$. Então, denotamos esse número como $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)\, d^3v$, onde a função $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$ é a chamada distribuição de velocidades das partículas em suspensão. Na expressão da média $\langle A(\mathbf{v}, t)\rangle_{\mathbf{v}_0}$, para cada valor possível de velocidade no instante $t > 0$, há $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)\, d^3v$ valores repetidos de $A(\mathbf{v}, t)$ somados. de Dessa forma, a média $\langle A(\mathbf{v}, t)\rangle_{\mathbf{v}_0}$ nada mais é do que a soma de todos esses valores de $A(\mathbf{v}, t)$, para todas as possíveis velocidades no instante $t > 0$, dividida pelo número total $N$. Portanto, em termos da distribuição $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$, a média $\langle A(\mathbf{v}, t)\rangle_{\mathbf{v}_0}$ é escrita como uma integral:

$$\langle A(\mathbf{v}, t)\rangle_{\mathbf{v}_0} = \frac{1}{N} \int d^3v\, Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)\, A(\mathbf{v}, t),$$

isto é,

$$\langle A(\mathbf{v}, t)\rangle_{\mathbf{v}_0} = \int d^3v\, f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)\, A(\mathbf{v}, t), \qquad (3)$$

onde a integral é feita sobre todos os valores reais das componentes de $\mathbf{v}$. Na Eq. (2) dizemos que a quantidade $d^3v\, f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$ é a probabilidade de que a velocidade $\mathbf{v}$ de uma partícula em suspensão esteja no intervalo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, no instante $t$, onde $d\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} dv_x + \hat{\mathbf{y}} dv_y + \hat{\mathbf{z}} dv_z$, supondo que a velocidade inicial era $\mathbf{v}_0$ em $t = 0$. A equação de Fokker e Planck dá a evolução temporal da distribuição $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$. É essa equação que vamos deduzir aqui.

Conforme o tempo passa, as velocidades das partículas em suspensão mudam. Assim, queremos relacionar a função $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t + \Delta t)$ com a função $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$, para um incremento temporal $\Delta t$. Tendo essa relação, podemos calcular a derivada parcial de $f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)$ com relação a $t$, tomando o limite quando $\Delta t$ vai a zero:

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t + \Delta t) - f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t)}{\Delta t}. \qquad (4)$$

O resultado desse limite fornece, portanto, a equação diferencial parcial que dita a dinâmica da distribuição de velocidades. A seguir mostro um raciocínio que, se você acompanhar, vai ajudar você a entender direitinho como é que surge a equação de Fokker e Planck.

Temos $N$ partículas em suspensão, no total. Dessas, queremos saber quantas têm suas velocidades dentro do elemento de volume infinitesimal $d^3v$, em torno de $\mathbf{v}$, no instante $t+\Delta t$, tendo todas partido com velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ em $t = 0$. Analogamente ao que vimos acima, esse número pode ser escrito como $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t + \Delta t)\, d^3v$. Logo, se no instante $t + \Delta t$ temos esse número de partículas com velocidades em torno de $\mathbf{v}$, então, no instante $t$, cada uma dessas partículas não tinha sua velocidade em torno de $\mathbf{v}$, já que as partículas em suspensão sofrem colisões que mudam suas velocidades conforme o tempo passa. No instante $t$, por exemplo, havia $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}, t)\, d^3v$ partículas com velocidades em torno de $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, mas nem todas elas terminaram ganhando um incremento de velocidade igual a $\mathbf{u}$ depois de um intervalo de tempo $\Delta t$. Logo, nem todas essas $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}, t)\, d^3v$ partículas contribuíram para o número $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t + \Delta t)\, d^3v$ em $t + \Delta t$. Seja, portanto, $g(\mathbf{w}, t, \mathbf{u}, \Delta t)\, d^3u$ a fração de partículas que, tendo velocidade $\mathbf{w}$ no instante $t$, ganham um incremento de velocidade no elemento de volume $d^3u = du_x du_y du_z$, em torno do vetor $\mathbf{u}$, durante o intervalo de tempo $\Delta t$, terminando com velocidade $\mathbf{w} + \mathbf{u}$. Portanto, das $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}, t)\, d^3v$ partículas com velocidades em torno de $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ no instante $t$, apenas o produto

$$Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}, t)\, d^3v\, g(\mathbf{v} - \mathbf{u}, t, \mathbf{u}, \Delta t)\, d^3u$$

adquire velocidade em torno de $\mathbf{v}$ no instante $t+\Delta t$, contribuindo para o total delas, isto é, $Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t + \Delta t)\, d^3v$. Levar em conta todas as contribuições para esse número em $t + \Delta t$ é equivalente a integrar

$$Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}, t)\, d^3v\, g(\mathbf{v} - \mathbf{u}, t, \mathbf{u}, \Delta t)\, d^3u$$

sobre todos os valores de $\mathbf{u}$, isto é,

$$Nf(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}, t + \Delta t)\, d^3v = Nd^3v \int d^3u\, f(\mathbf{v}_0, \mathbf{v} - \mathbf{u}, t)\, g(\mathbf{v} - \mathbf{u}, t, \mathbf{u}, \Delta t),$$

ou seja,

$$f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t+\Delta t\right) = \int d^3u\, f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}-\mathbf{u},t\right) g\left(\mathbf{v}-\mathbf{u},t,\mathbf{u},\Delta t\right), \tag{5}$$

onde $d^3u = du_x du_y du_z$ e a integral é feita sobre todos os valores reais das componentes de $\mathbf{u}$.

Para obtermos a equação de Fokker e Planck, devemos expandir o integrando da Eq. (5) em série de potências de $\mathbf{u}$. Assim, podemos expandir $f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}-\mathbf{u},t\right)$ e obter

$$f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}-\mathbf{u},t\right) = f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) - \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \cdots, \tag{6}$$

onde

$$\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} = u_x\frac{\partial}{\partial v_x} + u_y\frac{\partial}{\partial v_y} + u_z\frac{\partial}{\partial v_z}. \tag{7}$$

Já para obtermos o resultado esperado, vamos seguir o artigo de Uhlenbeck e Ornstein e, ao invés de $g\left(\mathbf{v}-\mathbf{u},t,\mathbf{u},\Delta t\right)$, vamos escrever $g\left(\mathbf{v}-\mathbf{u},t,\mathbf{w},\Delta t\right)$, com $\mathbf{w}$ no lugar de $\mathbf{u}$ no terceiro argumento da função $g$. Isso é um truque que fazemos para poder expandir essa função em série de potências do $\mathbf{u}$ que aparece apenas no primeiro argumento de $g$. Depois de feita essa expansão, aí sim vamos tomar $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ no terceiro argumento de $g$ e utilizar o resultado para gerar, através da integração indicada na Eq. (5), uma série de valores médios de potências de $\mathbf{u}$. Seguindo esse procedimento, escrevemos

$$\begin{aligned} g\left(\mathbf{v}-\mathbf{u},t,\mathbf{w},\Delta t\right) &= g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{w},\Delta t\right) \\ &- \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{w},\Delta t\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{w},\Delta t\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{8}$$

com $\mathbf{w}$ uma velocidade arbitrária. Isso é um truque e não há nada de errado com essa expressão, pois não estamos truncando a série, conforme as reticências indicam. Nesse caso, então, podemos calcular a Eq. (8) com $\mathbf{w}=\mathbf{u}$ e obter

$$g\left(\mathbf{v}-\mathbf{u},t,\mathbf{u},\Delta t\right) = g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) - \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) + \cdots, \tag{9}$$

que é válida desde que não trunquemos a série. Multiplicando as Eqs. (6) e (9) termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}-\mathbf{u},t\right) g\left(\mathbf{v}-\mathbf{u},t,\mathbf{u},\Delta t\right) &= f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) - f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \\ &- g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) \\ &+ \frac{1}{2} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \\ &+ \left[\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\right]\left[\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{10}$$

onde reordenei os termos por conveniência.

Agora a substituição da Eq. (10) na Eq. (5) dá

$$\begin{aligned} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t+\Delta t\right) &= f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\int d^3u\, g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) - f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\int d^3u\, \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \\ &- \left[\int d^3u\, g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\mathbf{u}\right]\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) \\ &+ \frac{1}{2} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\int d^3u\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \\ &+ \left\{\int d^3u\left[\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\right]\mathbf{u}\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int d^3u\, g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \cdots. \end{aligned} \tag{11}$$

Pela definição de $g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)$, vemos que

$$\int d^3u\, g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \;=\; 1, \qquad (12)$$

pois a soma de todas as frações do número total de partículas que sofrem algum incremento de velocidade durante o intervalo de tempo $\Delta t$ é igual à unidade, pois todas elas sofrem algum incremento de velocidade, mesmo que seja nulo. Também podemos escrever a segunda integral do membro direito da Eq. (11) assim:

$$\int d^3u\, \mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\int d^3u\, \mathbf{u} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}, \qquad (13)$$

onde notamos que

$$\left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}} \;=\; \int d^3u\, \mathbf{u} g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right), \qquad (14)$$

que é a média no ensemble do incremento de velocidade $\mathbf{u}$, no instante $t+\Delta t$, em que todas as partículas partem com velocidade $\mathbf{v}$ no instante $t$. Note que $\left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}$ é uma função de $\mathbf{v}$, $t$ e $\Delta t$. Já a quarta integral do membro direito da Eq. (11) pode ser escrita como

$$\int d^3u \left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \;=\; \int d^3u \left(\sum_{n=1}^{3} u_n\frac{\partial}{\partial v_n}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right), \qquad (15)$$

onde

$$u_1 = u_x,$$

$$u_2 = u_y,$$

$$u_3 = u_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1} = \frac{\partial}{\partial v_x},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} = \frac{\partial}{\partial v_y}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial v_3} = \frac{\partial}{\partial v_z}.$$

Então, a Eq. (15) pode ainda ser reescrita como

$$\int d^3u \left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \;=\; \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial v_m\partial v_n}\int d^3u\, u_m u_n g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right). \qquad (16)$$

Como a água é um meio isotrópico, segue que $g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)$ não depende da direção de $\mathbf{u}$ e, portanto,

$$\int d^3u\, u_m u_n g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \;=\; \frac{\delta_{mn}}{3}\int d^3u\, u^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right). \qquad (17)$$

Substituindo a Eq. (17) na Eq. (16), obtemos

$$\int d^3u \left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right) \;=\; \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}, \qquad (18)$$

onde vemos que

$$\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}} = \int d^3u\, u^2 g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right), \tag{19}$$

que é uma função de $\mathbf{v}$, $t$ e $\Delta t$. O quinto termo do membro direito da Eq. (11) pode, por sua vez, ser escrita assim:

$$\begin{aligned}
&\left\{\int d^3u \left[\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\right]\mathbf{u}\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\\
&=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\left\{\int d^3u\left[u_m\frac{\partial}{\partial v_m}g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\right]u_n\right\}\frac{\partial}{\partial v_n}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\\
&=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_n}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\frac{\partial}{\partial v_m}\int d^3u\, u_m u_n g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\\
&=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{\delta_{mn}}{3}\left[\frac{\partial}{\partial v_n}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\right]\frac{\partial\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\partial v_m},
\end{aligned} \tag{20}$$

onde usei as Eqs. (17) e (19). A Eq. (20) pode ainda ser escrita como

$$\left\{\int d^3u\left[\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\right]\mathbf{u}\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) = \frac{1}{3}\frac{\partial\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right). \tag{21}$$

O sexto termo do membro direito da Eq. (11) também pode ser escrito como

$$\frac{1}{2}\int d^3u\, g\left(\mathbf{v},t,\mathbf{u},\Delta t\right)\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\right)^2 f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) = \frac{1}{6}\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right), \tag{22}$$

onde usei as Eqs. (17) e (19). Substituindo as Eqs. (12), (13), (18), (21) e (22) na Eq. (11), obtemos

$$\begin{aligned}
f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t+\Delta t\right) &= f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) - f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}\\
&- \left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \frac{1}{6}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}\\
&+ \frac{1}{3}\frac{\partial\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\\
&+ \frac{1}{6}\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)+\cdots,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t+\Delta t\right) &= f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \left(\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}\right)f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\\
&+ \left(\frac{1}{3}\frac{\partial\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{v}} - \left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \frac{1}{6}\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)+\cdots.
\end{aligned} \tag{23}$$

Substituindo a Eq. (23) na Eq. (4), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)}{\partial t} &= \left(\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f_2 - \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\mathbf{f}_1\right)f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)\\
&+ \left(\frac{1}{3}\frac{\partial f_2}{\partial\mathbf{v}} - \mathbf{f}_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right) + \frac{1}{6}f_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f\left(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t\right)+\cdots,
\end{aligned} \tag{24}$$

onde definimos

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1\left(\mathbf{v},t\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left\langle\mathbf{u}\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\Delta t} \tag{25}$$

e

$$f_2 = f_2(\mathbf{v},t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\Delta t}. \qquad (26)$$

Para calcular esses limites, note que $\mathbf{u}$ representa um incremento de velocidade. Então, da integral da Eq. (1) no tempo, desde o instante $t$ até o instante $t+\Delta t$, segue que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t) = \frac{1}{m}\int_t^{t+\Delta t} dt'\,\mathbf{F}_L(t') - \frac{\gamma}{m}\int_t^{t+\Delta t} dt'\,\mathbf{v}(t'). \qquad (27)$$

Note que, pela discussão anterior, a quantidade que chamamos de $\mathbf{v}$ é, na Eq. (27), o valor de $\mathbf{v}(t)$. O valor médio no ensemble da Eq. (27) dá

$$\langle\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{v}} = -\frac{\gamma}{m}\left\langle\int_t^{t+\Delta t} dt'\,\mathbf{v}(t')\right\rangle_{\mathbf{v}}, \qquad (28)$$

pois a força de Langevin tem sua direção e sua intensidade aleatórias, resultando em uma média no ensemble nula, isto é,

$$\frac{1}{m}\int_t^{t+\Delta t} dt'\,\langle\mathbf{F}_L(t')\rangle_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

No entanto, observe que

$$\int_t^{t+\Delta t} dt'\,\mathbf{v}(t') = \mathbf{v}(t)\,\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right] = \mathbf{v}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right] \qquad (29)$$

e, portanto, substituindo a Eq. (29) na Eq. (28), obtemos

$$\langle\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{v}} = -\frac{\gamma}{m}\left\langle\mathbf{v}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]\right\rangle_{\mathbf{v}} = -\frac{\gamma}{m}\mathbf{v}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]. \qquad (30)$$

A substituição da Eq. (30) na Eq. (25) dá

$$\mathbf{f}_1 = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\frac{\gamma}{m}\mathbf{v}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]}{\Delta t} = -\frac{\gamma}{m}\mathbf{v}. \qquad (31)$$

Para calcular $f_2$, note que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}, \qquad (32)$$

onde usei a notação em que $\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}$, e, portanto,

$$u^2 = \left[\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}\right]^2.$$

Logo,

$$\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}} = \left\langle\left[\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}\right]^2\right\rangle_{\mathbf{v}},$$

isto é,

$$\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}} = \left\langle\left[\mathbf{v}(t+\Delta t)\right]^2 - 2\mathbf{v}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{v} + v^2\right\rangle_{\mathbf{v}},$$

ou seja,

$$\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}} = \left\langle\left[\mathbf{v}(t+\Delta t)\right]^2\right\rangle_{\mathbf{v}} - 2\left\langle\mathbf{v}(t+\Delta t)\cdot\mathbf{v}\right\rangle_{\mathbf{v}} + \left\langle v^2\right\rangle_{\mathbf{v}},$$

ou ainda,

$$\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}} = \left\langle\left[\mathbf{v}(t+\Delta t)\right]^2\right\rangle_{\mathbf{v}} - 2\left\langle\mathbf{v}(t+\Delta t)\right\rangle_{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + v^2, \qquad (33)$$

onde usei o fato de que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ é constante em um ensemble onde todas as partículas têm velocidade $\mathbf{v}$ no instante $t$ e também usei a relação

$$\left\langle v^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = v^2.$$

Segue da Eq. (32) que

$$\left\langle \mathbf{v}(t+\Delta t) \right\rangle_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \left\langle \mathbf{u} \right\rangle_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \frac{\gamma}{m}\mathbf{v}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right], \tag{34}$$

onde usei a Eq. (30). Substituindo a Eq. (34) na Eq. (33), obtemos

$$\left\langle u^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \left\langle \left[\mathbf{v}(t+\Delta t)\right]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} - 2\left\{\mathbf{v} - \frac{\gamma}{m}\mathbf{v}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]\right\} \cdot \mathbf{v} + v^2,$$

isto é,

$$\left\langle u^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \left\langle \left[\mathbf{v}(t+\Delta t)\right]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} - v^2 + 2\frac{\gamma}{m}v^2\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]. \tag{35}$$

Agora precisamos calcular $\left\langle \left[\mathbf{v}(t+\Delta t)\right]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}}$. Para fazer isso, note que a Eq. (1) pode ser reescrita assim:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\gamma}{m}\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_L(t),$$

que, multiplicada pelo fator integrante $\exp(\gamma t/m)$, fica

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{m}t\right)\mathbf{v}\right] = \frac{1}{m}\exp\left(\frac{\gamma}{m}t\right)\mathbf{F}_L(t). \tag{36}$$

A Eq. (36) pode ser formalmente integrada, desde o instante $t$ até um instante $t_f$ posterior, e o resultado é

$$\int_t^{t_f} dt' \frac{d}{dt'}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{m}t'\right)\mathbf{v}(t')\right] = \frac{1}{m}\int_t^{t_f} dt' \exp\left(\frac{\gamma}{m}t'\right)\mathbf{F}_L(t'),$$

isto é,

$$\exp\left(\frac{\gamma}{m}t_f\right)\mathbf{v}(t_f) = \exp\left(\frac{\gamma}{m}t\right)\mathbf{v}(t) + \frac{1}{m}\int_t^{t+\Delta t} dt' \exp\left(\frac{\gamma}{m}t'\right)\mathbf{F}_L(t'),$$

ou seja,

$$\mathbf{v}(t_f) = \exp\left[-\frac{\gamma}{m}(t_f - t)\right]\mathbf{v} + \frac{1}{m}\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \exp\left(\frac{\gamma}{m}t'\right)\mathbf{F}_L(t'). \tag{37}$$

Multiplicando cada membro da Eq. (37) escalarmente por si mesmo, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t_f)\cdot\mathbf{v}(t_f) &= \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right]v^2 + \frac{2}{m}\exp\left(-\frac{2\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t'+t)\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_L(t') \\ &+ \frac{1}{m^2}\exp\left(-\frac{2\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \exp\left(\frac{\gamma}{m}t'\right)\mathbf{F}_L(t')\cdot\int_t^{t_f} dt'' \exp\left(\frac{\gamma}{m}t''\right)\mathbf{F}_L(t''),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{v}(t_f)\right]^2 &= \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right]v^2 + \frac{2}{m}\exp\left(-\frac{2\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t'+t)\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_L(t') \\ &+ \frac{1}{m^2}\exp\left(-\frac{2\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \int_t^{t_f} dt'' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t'+t'')\right]\mathbf{F}_L(t')\cdot\mathbf{F}_L(t''). \end{aligned} \tag{38}$$

Tomando a média da Eq. (38) no ensemble definido por todas as partículas com velocidade $\mathbf{v}$ no instante $t$, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle\left[\mathbf{v}(t_f)\right]^2\right\rangle_{\mathbf{v}} &= \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right]v^2 + \frac{2}{m}\exp\left(-\frac{2\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t'+t)\right]\mathbf{v}\cdot\left\langle\mathbf{F}_L(t')\right\rangle_{\mathbf{v}} \\ &+ \frac{1}{m^2}\exp\left(-\frac{2\gamma}{m}t_f\right)\int_t^{t_f} dt' \int_t^{t_f} dt'' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t'+t'')\right]\left\langle\mathbf{F}_L(t')\cdot\mathbf{F}_L(t'')\right\rangle_{\mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Veja que, como $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ é uma constante no ensemble, segue que

$$\left\langle v^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = v^2$$

e

$$\left\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_L(t') \right\rangle_{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \cdot \left\langle \mathbf{F}_L(t') \right\rangle_{\mathbf{v}},$$

que usamos para obter a Eq. (39). Como a força de Langevin é completamente aleatória, segue que

$$\left\langle \mathbf{F}_L(t') \right\rangle_{\mathbf{v}} = \mathbf{0},$$

como já expliquei na postagem Coeficiente de difusão, e a Eq. (39) fica assim:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\mathbf{v}(t_f)\right]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} &= \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right] v^2 \\ &+ \frac{1}{m^2} \exp\left(-\frac{2\gamma}{m} t_f\right) \int_t^{t_f} dt' \int_t^{t_f} dt'' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t' + t'')\right] \left\langle \mathbf{F}_L(t') \cdot \mathbf{F}_L(t'') \right\rangle_{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (40)$$

A média $\left\langle \mathbf{F}_L(t') \cdot \mathbf{F}_L(t'') \right\rangle_{\mathbf{v}}$ dá a correlação da força de Langevin em dois instantes quaisquer, $t'$ e $t''$, que só não é nulo quando a diferença entre os instantes de tempo, $t' - t''$, for muito reduzida, em torno do chamado tempo de correlação da força de Langevin. Assim, postulamos que a força de Langevin tem correlação dada por

$$\left\langle \mathbf{F}_L(t') \cdot \mathbf{F}_L(t'') \right\rangle_{\mathbf{v}} = C_L(t' - t''), \quad (41)$$

onde $C_L(t' - t'') = C_L(t'' - t')$ é uma função par, muito estreita e centrada em zero, isto é, tem seu maior valor quando $t' = t''$, indo a zero rapidamente conforme a diferença entre os instantes de tempo aumenta. Substituindo a Eq. (41) na Eq. (40), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\mathbf{v}(t_f)\right]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} &= \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right] v^2 \\ &+ \frac{1}{m^2} \exp\left(-\frac{2\gamma}{m} t_f\right) \int_t^{t_f} dt' \int_t^{t_f} dt'' \exp\left[\frac{\gamma}{m}(t' + t'')\right] C_L(t' - t''). \end{aligned} \quad (42)$$

Façamos a seguinte substituição de variáveis:

$$s = t' - t'' \quad (43)$$

e

$$w = t' + t''. \quad (44)$$

O determinante Jacobiano para essa transformação fica

$$\frac{\partial(s, w)}{\partial(t', t'')} = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial t'} & \frac{\partial w}{\partial t'} \\ \frac{\partial s}{\partial t''} & \frac{\partial w}{\partial t''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

e os elementos de área correspondentes estão relacionados como

$$ds dw = 2 dt' dt'',$$

isto é,

$$dt' dt'' = \frac{1}{2} ds dw. \quad (45)$$

Substituindo as Eqs. (43), (44) e (45) na Eq. (42), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\mathbf{v}(t_f)\right]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} &= \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right] v^2 \\ &+ \frac{1}{2m^2} \exp\left(-\frac{2\gamma}{m} t_f\right) \int_{2t}^{2t_f} dw \exp\left(\frac{\gamma}{m} w\right) \int_{t - t_f}^{t_f - t} ds\, C_L(s). \end{aligned} \quad (46)$$

Como $C_L(s)$ é uma função muito concentrada em torno de $s = 0$, podemos estender a integração sobre $s$ desde valores infinitamente negativos até valores infinitamente positivos quando $t_f - t$ for maior do que o tempo de correlação e vamos tomar $\Delta t$ como sendo maior do que esse tempo de correlação também. Nesse caso,

$$\int_{t-t_f}^{t_f-t} ds\, C_L(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, C_L(s) = \tau \qquad (47)$$

e a Eq. (46) pode ser reescrita como

$$\left\langle [\mathbf{v}(t_f)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right] v^2 + \frac{\tau}{2m^2} \exp\left(-\frac{2\gamma}{m} t_f\right) \int_{2t}^{2t_f} dw \exp\left(\frac{\gamma}{m} w\right),$$

isto é,

$$\left\langle [\mathbf{v}(t_f)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right] v^2 + \frac{\tau}{2\gamma m} \exp\left(-\frac{2\gamma}{m} t_f\right) \left[\exp\left(\frac{2\gamma}{m} t_f\right) - \exp\left(\frac{2\gamma}{m} t\right)\right],$$

ou seja,

$$\left\langle [\mathbf{v}(t_f)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right] v^2 + \frac{\tau}{2\gamma m} \left\{1 - \exp\left[-\frac{2\gamma}{m}(t_f - t)\right]\right\}, \qquad (48)$$

onde usei a definição da constante $\tau$ da Eq. (47). No limite em que $t_f$ vai a infinito, a Eq. (48) fornece

$$\left\langle [\mathbf{v}(\infty)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \frac{\tau}{2\gamma m},$$

isto é,

$$\tau = 2\gamma m \left\langle [\mathbf{v}(\infty)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}}. \qquad (49)$$

Mas nós sabemos que, para longos tempos, há equipartição de energia e a energia cinética média tende a $3k_B T/2$, onde $k_B$ é a constante de Boltzmann e $T$ é a temperatura absoluta do meio. Assim,

$$\left\langle \frac{1}{2} m [\mathbf{v}(\infty)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \frac{3}{2} k_B T. \qquad (50)$$

Das Eqs. (49) e (50) segue que

$$\tau = 6\gamma k_B T. \qquad (51)$$

Substituindo a Eq. (51) na Eq. (48) e tomando $t_f = t + \Delta t$, obtemos

$$\left\langle [\mathbf{v}(t + \Delta t)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \exp\left(-\frac{2\gamma}{m}\Delta t\right) v^2 + \frac{3k_B T}{m}\left[1 - \exp\left(-\frac{2\gamma}{m}\Delta t\right)\right]. \qquad (52)$$

Explicitamente, até primeira ordem em $\Delta t$, a Eq. (52) fica

$$\left\langle [\mathbf{v}(t + \Delta t)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \left(1 - \frac{2\gamma}{m}\Delta t\right) v^2 + \frac{3k_B T}{m}\left[1 - \left(1 - \frac{2\gamma}{m}\Delta t\right)\right],$$

isto é,

$$\left\langle [\mathbf{v}(t + \Delta t)]^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = v^2 - \frac{2\gamma}{m} v^2 \Delta t + \frac{6\gamma k_B T}{m^2}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]. \qquad (53)$$

Substituindo a Eq. (53) na Eq. (35), obtemos

$$\left\langle u^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = v^2 - \frac{2\gamma}{m} v^2 \Delta t + \frac{6\gamma k_B T}{m^2}\Delta t - v^2 + 2\frac{\gamma}{m} v^2 \Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right],$$

isto é,

$$\left\langle u^2 \right\rangle_{\mathbf{v}} = \frac{6\gamma k_B T}{m^2}\Delta t + O\left[(\Delta t)^2\right]. \qquad (54)$$

Substituindo a Eq. (54) na Eq. (26), podemos encontrar $f_2$, isto é,

$$f_2 = f_2(\mathbf{v},t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left\langle u^2\right\rangle_{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{6\gamma k_B T}{m^2} + O(\Delta t)\right] = \frac{6\gamma k_B T}{m^2}. \qquad (55)$$

A substituição das Eqs. (31) e (55) na Eq. (24) dá

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\right) f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t) + \frac{\gamma}{m}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t) + \frac{1}{6}\frac{6\gamma k_B T}{m^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t) + \cdots,$$

isto é,

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\left[\mathbf{v} f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t)\right] + \frac{\gamma k_B T}{m^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t) + \cdots,$$

que, no limite em que $\Delta t$ vai a zero, fica

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\left[\mathbf{v} f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t)\right] + \frac{\gamma k_B T}{m^2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0,\mathbf{v},t). \qquad (56)$$

Note que não mais há as reticências porque todos os outros termos são proporcionais a $\Delta t$ e, portanto, tendem a zero no limite em que $\Delta t$ se aproxima de zero. No entanto, essa demonstração não vou explicitar aqui.

A Eq. (56) corresponde à que Uhlenbeck e Ornstein obtiveram em seu artigo de 1930, só que aqui está feita em três dimensões. Não creio ter cometido nenhum erro de cálculo e, portanto, creio ter a versão em três dimensões correta. No entanto, não encontrei, em minhas pesquisas na internet, uma referência com exatamente essa equação. Se você souber onde encontrar a Eq. (56), em outra fonte além desta postagem, por favor, deixe um comentário com a referência.