Trabalho virtual e forças generalizadas

Vamos supor N partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_N$, com respectivos vetores posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$, sob a ação de respectivas forças resultantes $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$. Esse sistema pode estar evoluindo dinamicamente no tempo, mas vamos considerar apenas um instante fixo. Nesse particular instante t, podemos considerar as mudanças em quantidades físicas referentes ao estado instantâneo do sistema, que ocorrem em função de variações infinitesimais em algumas das variáveis envolvidas na especificação do estado. Por exemplo, podemos imaginar deslocamentos das partículas de suas posições instantâneas, mas consideradas nesse mesmo instante de tempo t. Esses deslocamentos das posições características de um particular estado instantâneo do sistema são denominados "deslocamentos virtuais", pois não são aqueles que ocorrem devido à evolução temporal ditada pela dinâmica própria do sistema. Para tais deslocamentos, podemos calcular os trabalhos virtuais de todas as forças envolvidas. Assim, quando as posições são deslocadas virtualmente de $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ para $\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + \delta\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_2$, o trabalho virtual total é dado por

$$\delta W = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{r}_k. \qquad (1)$$

Dentro da formulação lagrangeana da mecânica clássica, temos as coordenadas generalizadas q_p, para $p = 1, 2, \ldots, 3N - N_V$, supondo que N_V é o número de vínculos holonômicos e que não há vínculos não holonômicos. Com isso, os deslocamentos virtuais das coordenadas cartesianas, $\delta\mathbf{r}_k$, podem ser expressos em termos dos deslocamentos virtuais das coordenadas generalizadas, δq_p, assim:

$$\delta\mathbf{r}_k = \sum_{p=1}^{3N-N_V} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_p} \delta q_p. \qquad (2)$$

O trabalho virtual da Eq. (1) pode ser agora expresso como

$$\delta W = \sum_{p=1}^{3N-N_V} \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_p} \right) \delta q_p,$$

isto é,

$$\delta W = \sum_{p=1}^{3N-N_V} Q_p \delta q_p, \qquad (3)$$

onde definimos a força generalizada por

$$Q_p = \left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_p} \right). \qquad (4)$$

Em particular, quando as forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$ são conservativas, existe uma energia potencial, V, tal que

$$\mathbf{F}_k \quad = \quad -\boldsymbol{\nabla}_k V, \qquad (5)$$

onde definimos o símbolo $\boldsymbol{\nabla}_k$ como o gradiente com relação ao vetor posição $\mathbf{r}_k$, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}_k V \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial V}{\partial x_k} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial V}{\partial y_k} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z_k}. \qquad (6)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (4) e fazendo uso explícito da Eq. (6), obtemos

$$Q_p \quad = \quad -\sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{\nabla}_k V) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_p} = -\sum_{k=1}^{N} \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial V}{\partial x_k} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial V}{\partial y_k} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z_k} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_p}$$

e, como

$$\mathbf{r}_k \quad = \quad \hat{\mathbf{x}} x_k + \hat{\mathbf{y}} y_k + \hat{\mathbf{z}} z_k, \qquad (7)$$

segue que

$$Q_p \quad = \quad -\sum_{k=1}^{N} \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial V}{\partial x_k} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial V}{\partial y_k} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z_k} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial x_k}{\partial q_p} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial y_k}{\partial q_p} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial z_k}{\partial q_p} \right),$$

isto é,

$$Q_p \quad = \quad -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_p} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_p} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_p} \right),$$

ou seja,

$$Q_p \quad = \quad -\frac{\partial V}{\partial q_p}. \qquad (8)$$

Bibliografia

[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, terceira edição (Addison Wesley, 1971).