Rotação de um corpo rígido e as equações de Euler

As componentes u_x, u_y e u_z de um vetor $\mathbf{u}$ podem ser escritas em termos de produtos escalares entre $\mathbf{u}$ e os versores da base $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$, isto é,

$$u_x = \hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{u},$$

$$u_y = \hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{u}$$

e

$$u_z = \hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Como

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} u_x + \hat{\mathbf{y}} u_y + \hat{\mathbf{z}} u_z,$$

segue que podemos também escrever o vetor $\mathbf{u}$ assim:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{u} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{u} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Essa expressão sugere uma notação bastante curiosa: que tal escrevermos

$$\mathbf{u} = (\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}) \cdot \boldsymbol{u}$$

e definirmos o produto diádico entre dois vetores quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como a simples justaposição $\mathbf{AB}$, com o entendimento implícito de que um produto escalar com um terceiro vetor será tomado para que essa quantidade faça sentido? Então, podemos definir a díade identidade como

$$\overleftrightarrow{1} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}$$

e, portanto,

$$\mathbf{u} = \overleftrightarrow{1} \cdot \boldsymbol{u}.$$

Uma díade também pode ser pensada como outra maneira de representar um tensor. Nós não vamos nos deter mais nisso nesta postagem, mas a utilização da notação diádica é muito útil no que segue.

Para a rotação de um corpo rígido, o torque $\mathbf{N}$ é igual à derivada temporal do momentum angular $\mathbf{L}$, isto é,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}. \qquad (1)$$

Na postagem sobre rotação em torno de um eixo há a ideia de que em um corpo rígido todas as partículas giram em torno de um eixo com a mesma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Agora, para o caso geral em que não há apenas um eixo de rotação, podemos pensar em $\boldsymbol{\omega}$ como variando no tempo, mas de tal forma que, em cada instante, todas as partículas giram em torno do eixo instantâneo dado por $\boldsymbol{\omega}$. Que esse é o caso geral demonstramos na postagem sobre sistemas de coordenadas em movimento. Assim, para N partículas pontuais, temos

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k), \qquad (2)$$

onde a velocidade da k-ésima partícula é dada por

$$\dot{\mathbf{r}}_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k. \qquad (3)$$

A Eq. (2) pode ser reescrita como

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k \boldsymbol{\omega} - \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega},$$

isto é,

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k \overleftrightarrow{1} \cdot \boldsymbol{\omega} - \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega},$$

ou seja,

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k \overleftrightarrow{1} - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k \right) \cdot \boldsymbol{\omega},$$

ou ainda,

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(r_k^2 \overleftrightarrow{1} - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k \right) \cdot \boldsymbol{\omega}. \qquad (4)$$

Na Eq. (4) reconhecemos o tensor

$$\overleftrightarrow{I} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(r_k^2 \overleftrightarrow{1} - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k \right), \qquad (5)$$

que é chamado de tensor de inércia e podemos reescrever a Eq. (4) como

$$\mathbf{L} = \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \qquad (6)$$

No caso de um corpo rígido composto por um contínuo de matéria, com densidade de massa ρ, podemos reescrever a Eq. (5) como

$$\overleftrightarrow{I} = \int d^3 r \, \rho \left(r^2 \overleftrightarrow{1} - \mathbf{r}\mathbf{r} \right), \qquad (7)$$

onde a integral é sobre todos os pontos onde ρ é diferente de zero.

Está claro na Eq. (5) que $\overleftrightarrow{I}$ muda no tempo porque $\mathbf{r}_k$ varia no tempo. No entanto, em um sistema de coordenadas que gira junto com o corpo, em torno do eixo instantâneo $\boldsymbol{\omega}$, $\overleftrightarrow{I}$ é constante. Então, vamos mudar de sistema de coordenadas para o sistema S^*, que gira com o corpo rígido. Dessa forma, de acordo com a postagem sobre sistemas de coordenadas em movimento, temos

$$\frac{d^*\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}. \qquad (8)$$

A substituição da Eq. (6) na Eq. (8) fornece

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\right), \qquad (9)$$

onde usei o fato de que $\overleftrightarrow{I}$ é constante no sistema de coordenadas S^*. Também sabemos que, de acordo com a postagem sobre sistemas de coordenadas em movimento,

$$\frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

e, com isso, a Eq. (9) fica

$$\overleftrightarrow{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega} \times \left(\overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\right). \qquad (10)$$

É interessante, neste ponto da discussão, notar que o tensor de inércia, representado pela díade da Eq. (5) ou da Eq. (7), é simétrico. Para ver isso, podemos escrever o tensor de inércia na forma matricial. Da Eq. (7), por exemplo, fica claro que

$$\overleftrightarrow{I} = \int d^3r\, \rho \left[r^2 \left(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\right) - \left(\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z\right)\left(\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z\right)\right],$$

isto é,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{I} &= \int d^3r\, \rho \left[\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}\left(r^2 - x^2\right) + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}\left(r^2 - y^2\right) + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\left(r^2 - z^2\right)\right] \\ &- \int d^3r\, \rho \left(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}xy + \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}}xz + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}xy + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}}yz + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}xz + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}}yz\right),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{I} &= \int d^3r\, \rho \left[\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}\left(y^2 + z^2\right) + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}\left(x^2 + z^2\right) + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}\left(x^2 + y^2\right)\right] \\ &- \int d^3r\, \rho \left(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{y}}xy + \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}}xz + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}xy + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{z}}yz + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}xz + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{y}}yz\right). \qquad (11)\end{aligned}$$

Podemos agora montar uma matriz assim:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{x}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{x}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{y}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{y}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{z}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{z}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix},$$

que, usando a Eq. (11), resulta em

$$\left[\begin{array}{ccc} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \int d^3r\,\rho\left(y^2+z^2\right) & -\int d^3r\,\rho xy & -\int d^3r\,\rho xz \\ -\int d^3r\,\rho xy & \int d^3r\,\rho\left(x^2+z^2\right) & -\int d^3r\,\rho yz \\ -\int d^3r\,\rho xz & -\int d^3r\,\rho yz & \int d^3r\,\rho\left(x^2+y^2\right) \end{array}\right]. \qquad (12)$$

Da Eq. (12), vemos que

$$I_{xy} = I_{yx},$$

$$I_{xz} = I_{zx}$$

e

$$I_{yz} = I_{zy},$$

mostrando que o tensor de inércia é simétrico. Porque é simétrico, existe um sistema de coordenadas que diagonaliza o tensor de inércia, que então pode ser escrito assim:

$$\overleftrightarrow{I} = \hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 I_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2 I_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3 I_3, \qquad (13)$$

onde os versores $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ são os chamados eixos principais do corpo rígido, ou auto-vetores de $\overleftrightarrow{I}$, e, como é possível, são escolhidos ortogonais, mesmo quando há degenerescência, isto é, quando pelo menos dois dos auto-valores I_1, I_2 e I_3 são iguais. Note que os eixos principais do corpo rígido são fixos a ele e, portanto, giram juntamente com o corpo rígido.

Substituindo a Eq. (13) na Eq. (10), obtemos

$$\left(\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 I_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2 I_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega}\times\left[\left(\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 I_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2 I_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right],$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\frac{d\omega_1}{dt} + \hat{\mathbf{e}}_2 I_2\frac{d\omega_2}{dt} + \hat{\mathbf{e}}_3 I_3\frac{d\omega_3}{dt} = \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3\right), \qquad (14)$$

onde escrevemos $\boldsymbol{\omega}$ em componentes ao longo dos eixos principais, isto é,

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{e}}_1\omega_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\omega_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\omega_3 \qquad (15)$$

e, como os versores ao longo dos eixos principais são escolhidos ortogonais entre si, também são numerados convencionalmente de modo a termos

$$\hat{\mathbf{e}}_1\times\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (16)$$

e suas permutações cíclicas. Usando a Eq. (15), obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3\right) &= \left(\hat{\mathbf{e}}_1\omega_1 + \hat{\mathbf{e}}_2\omega_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\omega_3\right) \\ &\times \left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1+\hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2+\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3\right) &= \hat{\mathbf{e}}_1\times\left(\hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_1\omega_2+\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_1\omega_3\right)\\ &+ \hat{\mathbf{e}}_2\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1\omega_2+\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_2\omega_3\right)\\ &+ \hat{\mathbf{e}}_3\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1\omega_3+\hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2\omega_3\right),\end{aligned}$$

ou seja, com a Eq. (16) e suas permutações cíclicas, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1+\hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2+\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3\right) &= \hat{\mathbf{e}}_3 I_2\omega_1\omega_2-\hat{\mathbf{e}}_2 I_3\omega_1\omega_3\\ &- \hat{\mathbf{e}}_3 I_1\omega_1\omega_2+\hat{\mathbf{e}}_1 I_3\omega_2\omega_3\\ &+ \hat{\mathbf{e}}_2 I_1\omega_1\omega_3-\hat{\mathbf{e}}_1 I_2\omega_2\omega_3,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\times\left(\hat{\mathbf{e}}_1 I_1\omega_1+\hat{\mathbf{e}}_2 I_2\omega_2+\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3\right) &= \hat{\mathbf{e}}_1\left(I_3-I_2\right)\omega_2\omega_3\\ &+ \hat{\mathbf{e}}_2\left(I_1-I_3\right)\omega_1\omega_3\\ &+ \hat{\mathbf{e}}_3\left(I_2-I_1\right)\omega_1\omega_2. \qquad (17)\end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (17) na Eq. (14) e tomando suas componentes ao longo dos eixos principais do corpo rígido, obtemos

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}+\left(I_3-I_2\right)\omega_2\omega_3 = N_1, \qquad (18)$$

$$I_2\frac{d\omega_2}{dt}+\left(I_1-I_3\right)\omega_1\omega_3 = N_2 \qquad (19)$$

e

$$I_3\frac{d\omega_3}{dt}+\left(I_2-I_1\right)\omega_1\omega_2 = N_3. \qquad (20)$$

As Eqs. (18), (19) e (20) são conhecidas como as equações de Euler para o movimento de um corpo rígido. Se um ponto do corpo permanece fixo durante o movimento, então a origem dos eixos principais é escolhida como aquele ponto. Quando não há um ponto fixo, o centro de massa do corpo rígido é escolhido como a origem dos eixos principais. Os momentos de inércia e os torques são todos calculados com relação à origem dos eixos principais.

Na ausência de torques externos, a Eq. (10) mostra que

$$\overleftrightarrow{I}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\boldsymbol{\omega}\times\left(\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\right).$$

Assim, para que possamos ter um movimento com $\boldsymbol{\omega}$ constante, é necessário que

$$\boldsymbol{\omega}\times\left(\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\right) = \mathbf{0},$$

isto é, que $\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$ seja paralelo a $\boldsymbol{\omega}$:

$$\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}, \qquad (21)$$

para alguma constante real λ. Note que a Eq. (21) é uma equação de auto-valores e auto-vetores, mostrando que λ deve ser um dos autovalores de $\overleftrightarrow{I}$ e $\boldsymbol{\omega}$, um de seus auto-vetores. Logo, $\boldsymbol{\omega}$ deve estar ao longo de um dos eixos principais do corpo rígido, para que esse corpo possa girar com $\boldsymbol{\omega}$ constante.

A energia cinética do corpo rígido é dada por

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2. \qquad (22)$$

A substituição da Eq. (3) na Eq. (22) fornece

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k\right)^2,$$

isto é,

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k\right) \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k\right),$$

ou seja,

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\mathbf{r}_k \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k\right)\right],$$

ou ainda, usando a Eq. (2), obtemos

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\mathbf{r}_k \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k\right)\right] \right\} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \qquad (23)$$

Substituindo a Eq. (6) na Eq. (23), obtemos

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \qquad (24)$$

No sistema de coordenadas S^*, $\overleftrightarrow{I}$ é constante e, portanto,

$$\frac{d^*}{dt}\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) = \left(\frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \left(\frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt}\right). \qquad (25)$$

Como $\overleftrightarrow{I}$ é simétrico, decorre que

$$\left(\frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{d^* \omega_m}{dt} I_{m,n} \omega_n = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{d^* \omega_m}{dt} I_{n,m} \omega_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \omega_n I_{n,m} \frac{d^* \omega_m}{dt},$$

isto é,

$$\left(\frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt}\right) \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \overleftrightarrow{I} \cdot \left(\frac{d^* \boldsymbol{\omega}}{dt}\right). \qquad (26)$$

Logo, substituindo a Eq. (26) na Eq. (25), obtemos

$$\frac{d^*}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\right) = 2\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\left(\frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt}\right). \qquad (27)$$

Substituindo a Eq. (24) na Eq. (27), obtemos

$$\frac{d^*}{dt}(2T) = 2\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\left(\frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt}\right),$$

isto é,

$$\frac{d^*T}{dt} = \boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt}. \qquad (28)$$

Nós já sabemos que

$$\frac{d^*\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

e, portanto, a Eq. (28) pode ser reescrita como

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \qquad (29)$$

onde já usei o fato de que

$$\frac{d^*T}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

pois a energia cinética é um escalar. Substituindo a Eq. (10) na Eq. (29), obtemos

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{N} - \boldsymbol{\omega}\cdot\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\right],$$

isto é,

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{N}, \qquad (30)$$

já que, obviamente,

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\right] = 0.$$

Um corpo rígido simétrico girando livremente

Vamos considerar agora um corpo rígido com dois dos momentos de inércia principais iguais, $I_1 = I_2$, isto é, um corpo rígido simétrico, na ausência de torques externos. Nesse caso, as Eqs. (18), (19) e (20) ficam

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \beta\omega_3\omega_2 = 0, \qquad (31)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} - \beta\omega_3\omega_1 = 0 \qquad (32)$$

e

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0, \qquad (33)$$

onde, por conveniência notacional, definimos

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \qquad (34)$$

A Eq. (33) mostra que ω_3 é constante. Derivando a Eq. (31) com relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \beta\omega_3 \frac{d\omega_2}{dt} = 0. \qquad (35)$$

Substituindo a Eq. (32) na Eq. (35), obtemos

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + (\beta\omega_3)^2 \omega_1 = 0. \qquad (36)$$

A solução geral da Eq. (36), que descreve um oscilador harmônico unidimensional com frequência $\beta\omega_3$, é escrita como

$$\omega_1(t) = A\cos(\beta\omega_3 t + \phi), \qquad (37)$$

onde A e ϕ são constantes para ser determinadas a partir das condições iniciais do problema. Tomando a derivada temporal da Eq. (37), obtemos

$$\frac{d\omega_1(t)}{dt} = -\beta\omega_3 A\mathrm{sen}(\beta\omega_3 t + \phi). \qquad (38)$$

Substituindo a Eq. (38) na Eq. (31), obtemos

$$-\beta\omega_3 A\mathrm{sen}(\beta\omega_3 t + \phi) + \beta\omega_3\omega_2 = 0,$$

isto é,

$$\beta\omega_3\omega_2 = \beta\omega_3 A\mathrm{sen}(\beta\omega_3 t + \phi),$$

ou seja,

$$\omega_2(t) = A\mathrm{sen}(\beta\omega_3 t + \phi). \qquad (39)$$

As Eqs. (37) e (39) indicam que o vetor $\boldsymbol{\omega}$ pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{e}}_1 A\cos(\beta\omega_3 t + \phi) + \hat{\mathbf{e}}_2 A\mathrm{sen}(\beta\omega_3 t + \phi) + \hat{\mathbf{e}}_3\omega_3, \qquad (40)$$

onde usei a Eq. (15). Vemos, portanto, que o vetor $\boldsymbol{\omega}$ precessa em torno do eixo principal $\hat{\mathbf{e}}_3$, com velocidade de precessão dada por $\beta\omega_3$. A magnitude de $\boldsymbol{\omega}$ é calculada assim:

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{\left[A\cos\left(\beta\omega_3 t+\phi\right)\right]^2+\left[A\mathrm{sen}\left(\beta\omega_3 t+\phi\right)\right]^2+\omega_3^2} = \sqrt{A^2+\omega_3^2}. \qquad (41)$$

O cosseno do ângulo entre $\boldsymbol{\omega}$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ é dado por

$$\cos\alpha_b = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{e}}_3}{|\boldsymbol{\omega}|\,|\hat{\mathbf{e}}_3|} = \frac{\omega_3}{\sqrt{A^2+\omega_3^2}}, \qquad (42)$$

onde usei as Eqs. (40) e (41). Podemos também calcular o momentum angular $\mathbf{L}$, através da Eq. (6), e usando as Eqs. (13) e (4), vemos que o resultado é dado por

$$\mathbf{L} = \hat{\mathbf{e}}_1 I_1 A\cos\left(\beta\omega_3 t+\phi\right)+\hat{\mathbf{e}}_2 I_1 A\mathrm{sen}\left(\beta\omega_3 t+\phi\right)+\hat{\mathbf{e}}_3 I_3\omega_3, \qquad (43)$$

onde já utilizei o fato de que estamos tradando o caso simétrico onde $I_2 = I_1$. Veja que $\mathbf{L}$ também precessa em torno de $\hat{\mathbf{e}}_3$ com velocidade angular de precessão dada por $\beta\omega_3$.

No espaço, $\mathbf{L}$ é constante quando $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, de acordo com a Eq. (1). O cosseno do ângulo entre $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{L}$ é dado por

$$\cos\alpha_s = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}}{|\boldsymbol{\omega}|\,|\mathbf{L}|}. \qquad (44)$$

Usando a Eq. (43), obtemos

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{I_1^2A^2\cos^2\left(\beta\omega_3 t+\phi\right)+I_1^2A^2\mathrm{sen}^2\left(\beta\omega_3 t+\phi\right)+I_3^2\omega_3^2},$$

isto é,

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{I_1^2A^2+I_3^2\omega_3^2}. \qquad (45)$$

Com o uso das Eqs. (40), (41), (43) e (45), a Eq. (44) pode ser reescrita como

$$\cos\alpha_s = \frac{I_1A^2+I_3\omega_3^2}{\sqrt{A^2+\omega_3^2}\sqrt{I_1^2A^2+I_3^2\omega_3^2}}, \qquad (46)$$

que é constante, isto é, o ângulo entre $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{L}$ é constante, sendo que $\mathbf{L}$ permanece fixo no espaço. Logo, $\boldsymbol{\omega}$ precessa em torno de $\mathbf{L}$. Da mesma forma que já vimos que $\mathbf{L}$ precessa em torno de $\hat{\mathbf{e}}_3$, no sistema de coordenadas que gira junto com o corpo rígido, podemos dizer que, no sistema de coordenadas fixo no espaço, o eixo $\hat{\mathbf{e}}_3$ precessa em torno de $\mathbf{L}$. Então, visto a partir do sistema de coordenadas fixo no espaço, $\mathbf{L}$ permanece fixo enquanto o plano formado pelos vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$, que contém $\mathbf{L}$, gira em torno de $\mathbf{L}$ com velocidade angular $\beta\omega_3$.

Da Eq. (34), obtemos

$$I_3 = I_1\left(1+\beta\right). \qquad (47)$$

Substituindo a Eq. (47) na Eq. (46), obtemos

$$\cos\alpha_s = \frac{I_1 A^2 + I_1 (1+\beta)\,\omega_3^2}{\sqrt{A^2+\omega_3^2}\sqrt{I_1^2 A^2 + I_1^2 (1+2\beta+\beta^2)\,\omega_3^2}},$$

isto é,

$$\cos\alpha_s = \frac{A^2 + (1+\beta)\,\omega_3^2}{\sqrt{A^2+\omega_3^2}\sqrt{A^2 + (1+2\beta+\beta^2)\,\omega_3^2}},$$

ou seja,

$$\cos\alpha_s = \frac{A^2 + \omega_3^2 + \beta\omega_3^2}{\sqrt{A^2+\omega_3^2}\sqrt{A^2 + \omega_3^2 + (2\beta+\beta^2)\,\omega_3^2}},$$

ou ainda, usando a Eq. (42),

$$\cos\alpha_s = \frac{\frac{\omega_3^2}{\cos^2\alpha_b} + \beta\omega_3^2}{\sqrt{\frac{\omega_3^2}{\cos^2\alpha_b}}\sqrt{\frac{\omega_3^2}{\cos^2\alpha_b} + (2\beta+\beta^2)\,\omega_3^2}}. \tag{48}$$

A Eq. (48) pode ser simplificada assim:

$$\cos\alpha_s = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha_b} + \beta}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha_b}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha_b} + (2\beta+\beta^2)}},$$

isto é,

$$\cos\alpha_s = \frac{1+\beta\cos^2\alpha_b}{\sqrt{1+(2\beta+\beta^2)\cos^2\alpha_b}}. \tag{49}$$

Bibliografia

[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, terceira edição (Addison Wesley, 1971).