Equações de Lagrange

Para entender rapidamente a ideia por trás das equações de Lagrange, pense em uma partícula de massa m movendo-se ao longo do eixo x, sob a ação de uma força F. A segunda lei de Newton dá a equação de movimento para essa partícula:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Usando a notação em que cada derivada é indicada com um ponto sobre a função sendo derivada, também podemos escrever essa equação como

$$m\ddot{x} = F.$$

Se a força é conservativa, pode ser obtida de uma energia potencial V e a equação de movimento fica

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Como o momentum da partícula é definido como

$$p = m\dot{x},$$

a equação de movimento também pode ser expressa como

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Note que a energia cinética da partícula é dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Então, veja que o momentum pode ser escrito em termos da energia cinética assim:

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}.$$

Bem esquisito em princípio, não é mesmo? Mas que pode, pode! Então,

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right),$$

não é verdade? Pois é. Agora, com essa expressão para a derivada temporal do momentum, podemos reescrever a equação de movimento da partícula como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

No presente caso, a energia cinética não depende da coordenada x da partícula. Como a energia potencial V não depende da velocidade da partícula, pois é uma energia potencial, segue que podemos definir uma função lagrangeana como

$$L = T - V$$

e a equação de movimento fica, em termos de L, assim:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial(T-L)}{\partial x}, \qquad (*)$$

onde usei $T = L + V$ no membro esquerdo e $V = T - L$ no membro direito. Assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(L+V)}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right),$$

já que $\partial V/\partial \dot{x} = 0$ e

$$\frac{\partial(T-L)}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x},$$

já que $\partial T/\partial x = 0$. Então, substituindo esses dois resultados em (*), segue a equação de Lagrange para o presente caso simples:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

O objetivo desta postagem é deduzir as equações de Lagrange para mais do que uma coordenada, usando sistemas de coordenadas generalizadas. Para isso, considere o preâmbulo abaixo sobre mudanças de coordenadas.

Mudanças de coordenadas

Na postagem sobre O pêndulo de Foucault um sistema de coordenadas girante S^* foi considerado. Nessa postagem eu escrevi os versores de S^* em termos dos versores de S, ou seja, dos versores que não giram por estarem fixos no espaço. Essa relação define uma mudança de coordenadas para descrever o mesmo sistema físico. Um vetor posição $\mathbf{r}$ de uma partícula de massa m pode ser escrito em termos das coordenadas de S ou em termos das coordenadas de S^*. Então, sejam x, y e z as coordenadas da partícula relativas ao sistema de coordenadas S e sejam q_1, q_2 e q_3 sua coordenadas relativas a S^*. Assim, o vetor posição pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \qquad (1)$$

relativamente a S, mas também pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = q_1\hat{\mathbf{x}}^* + q_2\hat{\mathbf{y}}^* + q_3\hat{\mathbf{z}}^*, \qquad (2)$$

relativamente a S^*. Podemos escrever as coordenadas q_1, q_2 e q_3 em termos das coordenadas x, y e z? Sim, claro! Para obter q_1 em termos de x, y e z, precisamos escrever o produto escalar de ambos os membros da Eq. (2) por $\hat{\mathbf{x}}^*$:

$$\hat{\mathbf{x}}^* \cdot \mathbf{r} \quad = \quad q_1 \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \hat{\mathbf{x}}^* + q_2 \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \hat{\mathbf{y}}^* + q_3 \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \hat{\mathbf{z}}^*.$$

Como os versores $\hat{\mathbf{x}}^*$, $\hat{\mathbf{y}}^*$ e $\hat{\mathbf{z}}^*$ são ortonormais, segue que

$$\hat{\mathbf{x}}^* \cdot \mathbf{r} \quad = \quad q_1,$$

isto é,

$$q_1 \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \hat{\mathbf{z}}, \qquad (3)$$

onde já usei a Eq. (1).

Na postagem sobre O pêndulo de Foucault os versores de S^* foram definidos em termos dos versores de S como

$$\hat{\mathbf{x}}^* \quad = \quad -\hat{\mathbf{x}} \mathrm{sen}\,(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t)\,, \qquad (4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}^* \quad = \quad -\hat{\mathbf{x}} \cos\theta \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}} \cos\theta \mathrm{sen}\,(\omega t) + \hat{\mathbf{z}} \mathrm{sen}\theta \qquad (5)$$

e

$$\hat{\mathbf{z}}^* \quad = \quad \hat{\mathbf{x}} \mathrm{sen}\theta \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} \mathrm{sen}\theta \mathrm{sen}\,(\omega t) + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta, \qquad (6)$$

onde ω e θ são constantes reais. Substituindo as Eqs. (4), (5) e (6) na Eq. (3), obtemos

$$q_1 \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}^* \cdot \mathbf{r} = -x \mathrm{sen}\,(\omega t) + y \cos(\omega t)\,. \qquad (7)$$

Veja que q_1 é uma função de x, y, z e t. Procedendo de maneira análoga, é possível encontrarmos também as coordenadas q_2 e q_3 em termos das coordenadas x, y, z e t :

$$q_2 \quad = \quad \hat{\mathbf{y}}^* \cdot \mathbf{r} = -x \cos\theta \cos(\omega t) - y \cos\theta \mathrm{sen}\,(\omega t) + z \mathrm{sen}\theta \qquad (8)$$

e

$$q_3 \quad = \quad \hat{\mathbf{z}}^* \cdot \mathbf{r} = x \mathrm{sen}\theta \cos(\omega t) + y \mathrm{sen}\theta \mathrm{sen}\,(\omega t) + z \cos\theta. \qquad (9)$$

Também é possível escrevermos as coordenadas x, y e z em termos das coordenadas q_1, q_2 e q_3. Nesse caso, para obter x, por exemplo, devemos multiplicar escalarmente ambos os membros da Eq. (1) por $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{r} \quad = \quad x \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}},$$

isto é,

$$x \quad = \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{r} = q_1 \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}^* + q_2 \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}^* + q_3 \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}}^*, \qquad (10)$$

onde já usei a Eq. (2). Substituindo as Eqs. (4), (5) e (6) na Eq. (10), obtemos

$$x = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{r} = -q_1 \text{sen}\,(\omega t) - q_2 \cos\theta \cos(\omega t) + q_3 \text{sen}\theta \cos(\omega t)\,. \qquad (11)$$

Veja que x é uma função de q_1, q_2, q_3 e t. Analogamente, também podemos escrever

$$y = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{r} = q_1 \cos(\omega t) - q_2 \cos\theta \text{sen}\,(\omega t) + q_3 \text{sen}\theta \text{sen}\,(\omega t) \qquad (12)$$

e

$$z = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{r} = q_2 \text{sen}\theta + q_3 \cos\theta. \qquad (13)$$

O exemplo acima ilustra o fato de que, em geral, uma mudança de coordenadas pode depender das coordenadas cartesianas originais e do tempo. Assim, um sistema caracterizado por N vetores posição, precisamos de $3N$ coordenadas cartesianas e, também, $3N$ coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_{3N}$. Em geral, teremos

$$q_k = q_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t)\,, \qquad (14)$$

para $k = 1, 2, \ldots, 3N$, onde x_j, y_j e z_j são as coordenadas do j-ésimo vetor posição dos N vetores posição que caracterizam o sistema. Como vimos na ilustração acima, as coordenadas cartesianas também podem ser escritas em termos das coordenadas generalizadas e, portanto,

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t)\,, \qquad (15)$$

$$y_j = y_j(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t) \qquad (16)$$

e

$$z_j = z_j(q_1, q_2, \ldots, q_{3N}, t)\,, \qquad (17)$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$.

Dedução da equação de Lagrange

Agora vamos nos concentrar no caso de termos um sistema caracterizado pelos N vetores posição de N partículas puntiformes. Como ilustrado no exemplo do começo desta postagem, vamos escrever a energia cinética no caso de $3N$ coordenadas:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right), \qquad (18)$$

onde m_j é a massa da j-ésima partícula. Mas, das Eqs. (15), (16) e (17) seguem, respectivamente,

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}, \qquad (19)$$

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial y_j}{\partial t} \qquad (20)$$

e

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial z_j}{\partial t}. \qquad (21)$$

O momentum generalizado, conjugado à coordenada generalizada q_l, é definido como

$$p_l = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}. \qquad (22)$$

Derivando a Eq. (18) parcialmente em relação a $\dot{q}_l$, obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \dot{y}_j^2}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial \dot{z}_j^2}{\partial \dot{q}_l} \right),$$

isto é,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} + \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{q}_l} + \dot{z}_j \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \dot{q}_l} \right). \qquad (23)$$

Das Eqs. (19), (20) e (21) seguem, respectivamente,

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial x_j}{\partial q_l}, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial y_j}{\partial q_l} \qquad (25)$$

e

$$\frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial z_j}{\partial q_l}. \qquad (26)$$

Substituindo as Eqs. (24), (25) e (26) na Eq. (23), obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \dot{y}_j \frac{\partial y_j}{\partial q_l} + \dot{z}_j \frac{\partial z_j}{\partial q_l} \right). \qquad (27)$$

Derivando com relação ao tempo a Eq. (27), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) &= \sum_{j=1}^{N} \left[(m_j \ddot{x}_j)\frac{\partial x_j}{\partial q_l} + (m_j \ddot{y}_j)\frac{\partial y_j}{\partial q_l} + (m_j \ddot{z}_j)\frac{\partial z_j}{\partial q_l} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\dot{x}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right) + \dot{y}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_j}{\partial q_l}\right) + \dot{z}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_j}{\partial q_l}\right) \right]. \qquad (28)\end{aligned}$$

Usando a segunda lei de Newton, a primeira soma no segundo membro da Eq. (28) pode ser reescrita como

$$Q_l = \sum_{j=1}^{N} \left[(\mathbf{F}_j)_x \frac{\partial x_j}{\partial q_l} + (\mathbf{F}_j)_y \frac{\partial y_j}{\partial q_l} + (\mathbf{F}_j)_z \frac{\partial z_j}{\partial q_l} \right], \qquad (29)$$

onde $\mathbf{F}_j$ é a força resultante sobre a partícula de massa m_j e Q_l é a l-ésima componente da chamada força generalizada. Aqui estou usando a notação, por exemplo, $(\mathbf{F}_j)_x$ para indicar a componente x do vetor $\mathbf{F}_j$.

Segue das Eqs. (15), (16) e (17) que as derivadas $\partial x_j/\partial q_l$, $\partial y_j/\partial q_l$ e $\partial z_j/\partial q_l$ também são funções das coordenadas generalizadas, q_1, $q_2, \ldots,$ q_{3N} e do tempo t. Sendo assim, a derivada temporal de $\partial x_j/\partial q_l$, por exemplo, é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_l}\right) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l}, \qquad (30)$$

onde usei a Eq. (19). Analogamente, usando as Eqs. (20) e (21), podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_j}{\partial q_l}\right) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 y_j}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 y_j}{\partial t \partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial y_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial y_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_l} \qquad (31)$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_j}{\partial q_l}\right) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 z_j}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 z_j}{\partial t \partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial z_j}{\partial t}\right) = \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial q_l}. \qquad (32)$$

Substituindo as Eqs. (29), (30), (31) e (32) na Eq. (28), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) = Q_l + \sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_l} + \dot{y}_j \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial q_l} + \dot{z}_j \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial q_l}\right),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) = Q_l + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial q_l} + \frac{\partial \dot{y}_j^2}{\partial q_l} + \frac{\partial \dot{z}_j^2}{\partial q_l}\right),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) = Q_l + \frac{\partial}{\partial q_l}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2\right)\right],$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \qquad (33)$$

onde usei a Eq. (18). As Eqs. (33), para $l = 1, 2, \ldots, 3N$, são as equações de Lagrange.

Na postagem Conservação de energia para um sistema de partículas falei sobre o caso em que a força sobre qualquer partícula de um sistema de partículas é conservativa e, portanto, pode ser deduzida de uma energia potencial. Nesse caso, a energia potencial pode ser escrita como

$$V = V\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N\right). \qquad (34)$$

Note que V não depende das velocidades e não depende explicitamente do tempo. A força sobre a j-ésima partícula é dada por

$$\mathbf{F}_j = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial V}{\partial x_j} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial V}{\partial y_j} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial V}{\partial z_j}. \qquad (35)$$

Quando as forças sobre as partículas do sistema são conservativas, a força generalizada, Eq. (29), pode ser reescrita como

$$Q_l = -\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_l} + \frac{\partial V}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial q_l} + \frac{\partial V}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial q_l}\right],$$

isto é, em virtude da Eq. (34),

$$Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}. \qquad (36)$$

A substituição da Eq. (36) na Eq. (33) resulta em

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l},$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \qquad (37)$$

onde definimos a função lagrangeana como

$$L = T - V. \qquad (38)$$

como V não depende de $\dot{q}_l$, para $l = 1, 2, \ldots, 3N$, segue da Eq. (38) que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}. \qquad (39)$$

A substituição da Eq. (39) na Eq. (37) resulta em

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \qquad (40)$$

para $l = 1, 2, \ldots, 3N$, que é a forma mais popular das equações de Lagrange.

Bibliografia

[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, terceira edição (Addison Wesley, 1971).