Ângulos de Euler

Considere um corpo rígido e seus três eixos principais, $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$, que são ortonormais. Vamos definir o sistema de coordenadas fixo ao corpo rígido, S^*, com os eixos x_1, x_2 e x_3 ao longo dos versores $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$, respectivamente. Quando o corpo rígido gira em torno de algum ponto que permanece fixo no espaço, tomamos a origem de S^* como sendo esse ponto fixo. No caso em que o corpo rígido não tem um ponto que fica fixo no espaço, tomamos a origem de S^* no centro de massa. Quando dois dos momentos de inércia principais do corpo rígido são iguais, sempre tomamos seus respectivos eixos principais como sendo $\hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_2$, por convenção. Também considere um sistema de coordenadas cartesianas, S, com eixos x, y e z, e seus três versores respectivos, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$. A origem de S, tomamos como sendo a mesma origem de S^*, de forma que S não é necessariamente fixo no espaço, já que o corpo rígido pode ter seu centro de massa em movimento, o que implicaria em uma origem de S^* móvel. No entanto, as direções $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ são tomadas como fixas no espaço. Logo, são necessários três ângulos para determinar a orientação de S^* com relação a S. Esses ângulos podem ser tomado como os chamados ângulos de Euler, que descrevo a seguir.

O primeiro ângulo de Euler chamamos de ϕ, que consiste de uma rotação dos eixos x, y e z em torno do eixo z, de um ângulo ϕ. A transformação de coordenadas para essa primeira rotação é descrita matricialmente como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_\phi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

onde

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi & 0 \\ -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Para entender as Eqs. (1) e (2), basta tomar um ponto no plano xy dado por (x', y'), nas coordenadas rodadas, e também dado por (x, y) nas coordenadas cartesianas originais. Em coordenadas polares, escrevemos

$$(x', y') = (r\cos\varphi, r\mathrm{sen}\varphi). \qquad (3)$$

Como os eixos x' e y' estão rodados de um ângulo ϕ com relação aos eixos x e y, segue que

$$(x, y) = (r\cos(\varphi+\phi), r\mathrm{sen}(\varphi+\phi)). \qquad (4)$$

Mas, da Eq. (4) segue que

$$x = r\cos(\varphi+\phi) = r\cos\varphi\cos\phi - r\mathrm{sen}\varphi\mathrm{sen}\phi,$$

isto é,

$$x = x'\cos\phi - y'\mathrm{sen}\phi, \qquad (5)$$

onde usei a Eq. (3), e

$$y = r\text{sen}\,(\varphi + \phi) = r\text{sen}\varphi \cos\phi + r\cos\varphi\text{sen}\phi,$$

ou seja,

$$y = x'\text{sen}\phi + y'\cos\phi, \qquad (6)$$

onde também usei a Eq. (3). Podemos colocar as Eqs. (5) e (6) em forma matricial assim:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Como

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

podemos multiplicar ambos os membros da Eq. (7) por

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

e obter

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

No caso de três coordenadas, mas mantendo os eixos z e z' coincidentes, podemos também escrever, com o auxílio da Eq. (9),

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

que explica as Eqs. (1) e (2). O novo eixo x' também é convencionalmente chamado de eixo ξ, ou linha nodal.

O segundo ângulo de Euler é chamado θ e consiste de uma rotação dos eixos x', y' e z' em torno do eixo x', de um ângulo θ. As novas coordenadas, depois dessa segunda rotação de Euler, são dadas por

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

onde

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Note que a substituição da Eq. (1) na Eq. (10) resulta em

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = R_\theta R_\phi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Finalmente, o terceiro ângulo de Euler chamamos de ψ, que consiste de uma rotação dos eixos x'', y'' e z'' em torno do eixo z'', de um ângulo ψ. As novas coordenadas, denotadas x_1, x_2 e x_3, são as coordenadas do sistema S^* mencionado acima. Então,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = R_\psi \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

onde

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \mathrm{sen}\psi & 0 \\ -\mathrm{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Substituindo a Eq. (12) na Eq. (13), obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = R_\psi R_\theta R_\phi \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Das Eqs. (2) e (11), obtemos

$$R_\theta R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ 0 & -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi & 0 \\ -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$R_\theta R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi & 0 \\ -\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi & \mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi & -\mathrm{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Das Eqs. (14) e (16), obtemos

$$\mathcal{R} = R_\psi R_\theta R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \mathrm{sen}\psi & 0 \\ -\mathrm{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \mathrm{sen}\phi & 0 \\ -\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi & \mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi & -\mathrm{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi & \cos\psi\,\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & \mathrm{sen}\psi\,\mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi & -\mathrm{sen}\psi\,\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\,\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi & -\mathrm{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Como cada uma das matrizes R_ϕ, R_θ e R_ψ é ortogonal, a inversa de cada uma é sua transposta e obtemos, para o produto das três,

$$\mathcal{R}^{-1} = \left(R_\psi R_\theta R_\phi\right)^{-1} = R_\phi^{-1} R_\theta^{-1} R_\psi^{-1} = R_\phi^t R_\theta^t R_\psi^t = \left(R_\psi R_\theta R_\phi\right)^t = \mathcal{R}^t. \qquad (18)$$

Das Eqs. (17) e (18) segue, portanto, que

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi & -\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi & \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi \\ \cos\psi\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi & -\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\mathrm{sen}\theta\cos\phi \\ \mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta & \cos\psi\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Não esqueça que os ângulos ϕ, θ e ψ são funções do tempo.

Agora vamos escrever, em termos dos ângulos de Euler e suas derivadas temporais, o vetor $\boldsymbol{\omega}$. Para isso, em termos dos eixos principais, que giram juntamente com o corpo rígido, podemos escrever

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + b_1\hat{\mathbf{e}}_2 + c_1\hat{\mathbf{e}}_3, \qquad (20)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{dt} = a_2\hat{\mathbf{e}}_1 + b_2\hat{\mathbf{e}}_2 + c_2\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (21)$$

e

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt} = a_3\hat{\mathbf{e}}_1 + b_3\hat{\mathbf{e}}_2 + c_3\hat{\mathbf{e}}_3. \qquad (22)$$

Seguindo o raciocínio da postagem Sistemas de coordenadas em movimento, vemos que o vetor $\boldsymbol{\omega}$ é definido como

$$\boldsymbol{\omega} = c_2\hat{\mathbf{e}}_1 + a_3\hat{\mathbf{e}}_2 + b_1\hat{\mathbf{e}}_3. \qquad (23)$$

Das Eqs. (20), (21) e (22), obtemos

$$b_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt}, \qquad (24)$$

$$c_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{dt} \qquad (25)$$

e

$$a_3 = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt}. \qquad (26)$$

Assim, precisamos calcular, explicitamente, $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ e suas derivadas temporais.

Da Eq. (15) segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(R_\psi R_\theta R_\phi\right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \qquad (27)$$

Como as coordenadas de $\hat{\mathbf{e}}_1$ no referencial S^* são dadas por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

segue que, em S, suas coordenadas são dadas por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (R_\psi R_\theta R_\phi)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, usando a Eq. (19), podemos escrever

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{x}}\left(\cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\cos\psi\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right) + \hat{\mathbf{z}}\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta. \tag{28}$$

De maneira completamente análoga, também obtemos

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{x}}\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(-\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right) + \hat{\mathbf{z}}\cos\psi\mathrm{sen}\theta \tag{29}$$

e

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{x}}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi - \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta. \tag{30}$$

Tomando as derivadas temporais das Eqs. (28), (29) e (30), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt} &= \hat{\mathbf{x}}\left[\dot{\psi}\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \dot{\phi}\left(-\cos\psi\mathrm{sen}\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right) + \dot{\theta}\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\right] \\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left[\dot{\psi}\left(-\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right) + \dot{\phi}\left(\cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) - \dot{\theta}\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\cos\phi\right] \\
&+ \hat{\mathbf{z}}\left(\dot{\psi}\cos\psi\mathrm{sen}\theta + \dot{\theta}\mathrm{sen}\psi\cos\theta\right), \qquad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\mathbf{e}}_2}{dt} &= \hat{\mathbf{x}}\left[\dot{\psi}\left(-\cos\psi\cos\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \dot{\phi}\left(\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi - \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right) + \dot{\theta}\cos\psi\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\right] \\
&+ \hat{\mathbf{y}}\left[\dot{\psi}\left(-\cos\psi\mathrm{sen}\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right) + \dot{\phi}\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) - \dot{\theta}\cos\psi\mathrm{sen}\theta\cos\phi\right] \\
&+ \hat{\mathbf{z}}\left(-\dot{\psi}\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta + \dot{\theta}\cos\psi\cos\theta\right) \qquad (32)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt} = \hat{\mathbf{x}}\left(\dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\cos\phi + \dot{\theta}\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi - \dot{\theta}\cos\theta\cos\phi\right) - \hat{\mathbf{z}}\dot{\theta}\mathrm{sen}\theta. \tag{33}$$

Substituindo as Eqs. (29) e (31) na Eq. (24), obtemos

$$\begin{aligned}
b_1 &= \dot{\psi}\left[\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right)^2 + \left(-\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right)^2 + \cos^2\psi\mathrm{sen}^2\theta\right] \\
&+ \dot{\phi}\left[\left(\cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right)\left(-\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right)\right. \\
&+ \left.\left(-\cos\psi\mathrm{sen}\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right)\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right)\right] \\
&+ \dot{\theta}\left[-\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\cos\phi\left(-\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right)\right. \\
&+ \left.\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\psi\mathrm{sen}\theta\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
b_1 &= \dot{\psi}\left(\mathrm{sen}^2\psi + \cos^2\psi\cos^2\theta + \cos^2\psi\mathrm{sen}^2\theta\right) \\
&+ \dot{\phi}\left(\cos^2\psi\cos^2\phi\cos\theta + \mathrm{sen}^2\psi\cos\theta\mathrm{sen}^2\phi + \cos^2\psi\mathrm{sen}^2\phi\cos\theta + \mathrm{sen}^2\psi\cos^2\phi\cos\theta\right) \\
&+ \dot{\theta}\left(-\cos^2\phi\mathrm{sen}\psi\cos\psi\mathrm{sen}\theta\cos\theta - \mathrm{sen}^2\phi\mathrm{sen}\psi\cos\psi\mathrm{sen}\theta\cos\theta + \mathrm{sen}\psi\cos\psi\mathrm{sen}\theta\cos\theta\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$b_1 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta. \qquad (34)$$

Substituindo as Eqs. (30) e (32) na Eq. (25), obtemos

$$\begin{aligned}
c_2 &= \dot{\psi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\left(-\cos\psi\cos\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\left(\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\phi - \cos\psi\cos\theta\cos\phi\right) \\
&+ \dot{\theta}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\cos\psi\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi - \dot{\psi}\mathrm{sen}\theta\cos\phi\left(-\cos\psi\mathrm{sen}\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right) \\
&- \dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\cos\phi\left(-\mathrm{sen}\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \dot{\theta}\mathrm{sen}\theta\cos\phi\cos\psi\mathrm{sen}\theta\cos\phi \\
&- \dot{\psi}\cos\theta\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta + \dot{\theta}\cos\theta\cos\psi\cos\theta,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
c_2 &= \dot{\psi}\left[-\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\cos\psi\cos\phi + \mathrm{sen}\theta\cos\phi\cos\psi\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\psi\cos\theta - \mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\cos\theta\right] \\
&+ \dot{\phi}\left[\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}^2\phi\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\cos\psi\cos\theta\cos\phi + \mathrm{sen}\theta\cos^2\phi\mathrm{sen}\psi + \mathrm{sen}\theta\cos\phi\cos\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right] \\
&+ \dot{\theta}\left[\mathrm{sen}^2\theta\mathrm{sen}^2\phi\cos\psi + \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\phi\cos\psi + \cos\psi\cos^2\theta\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_2 = \dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi. \qquad (35)$$

Substituindo as Eqs. (28) e (33) na Eq. (26), obtemos

$$\begin{aligned}
a_3 &= \left(\cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right)\left(\dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\cos\phi + \dot{\theta}\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) \\
&+ \left(\cos\psi\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right)\left(\dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi - \dot{\theta}\cos\theta\cos\phi\right) - \dot{\theta}\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
a_3 &= \dot{\phi}\left[\mathrm{sen}\theta\cos\phi\left(\cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) + \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\left(\cos\psi\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right)\right] \\
&+ \dot{\theta}\left[\cos\theta\mathrm{sen}\phi\left(\cos\psi\cos\phi - \mathrm{sen}\psi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\right) - \cos\theta\cos\phi\left(\cos\psi\mathrm{sen}\phi + \mathrm{sen}\psi\cos\theta\cos\phi\right)\right. \\
&- \left.\mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a_3 = \dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\cos\psi + \dot{\theta}\left(-\cos^2\theta\mathrm{sen}^2\phi\mathrm{sen}\psi - \cos^2\theta\cos^2\phi\mathrm{sen}\psi - \mathrm{sen}\psi\mathrm{sen}^2\theta\right),$$

ou ainda,

$$a_3 = \dot{\phi}\mathrm{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\mathrm{sen}\psi. \qquad (36)$$

Substituindo as Eqs. (34), (35) e (36) na Eq. (23), obtemos

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\phi}\text{sen}\theta\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)\hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\dot{\phi}\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\text{sen}\psi\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_3. \qquad (37)$$

De acordo com a postagem Rotação de um corpo rígido e as equações de Euler, a energia cinética do corpo rígido, no sistema S^*, é dada por

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\overleftrightarrow{I}\cdot\boldsymbol{\omega}, \qquad (38)$$

onde

$$\overleftrightarrow{I} = I_1\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1 + I_2\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2 + I_3\hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3. \qquad (39)$$

Substituindo as Eqs. (37) e (39) na Eq. (38), obtemos

$$T = \frac{1}{2}I_1\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}I_2\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}I_3\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\mathbf{e}}_3\hat{\mathbf{e}}_3\cdot\boldsymbol{\omega},$$

isto é,

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\phi}\text{sen}\theta\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\phi}\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\text{sen}\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2. \qquad (40)$$

No caso de um corpo com tensor de inércia tal que dois de seus momentos de inércia principais são iguais, digamos, $I_1 = I_2$, obtemos

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\phi}\text{sen}\theta\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\phi}\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\text{sen}\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2,$$

isto é,

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta\text{sen}^2\psi + \dot{\theta}^2\cos^2\psi + \dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta\cos^2\psi + \dot{\theta}^2\text{sen}^2\psi\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2,$$

ou seja,

$$T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2. \qquad (41)$$

Bibliografia

[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, terceira edição (Addison Wesley, 1971).