O pêndulo de Foucault

Para verificar a rotação da Terra, Foucault desenvolveu seu pêndulo. Uma pequena massinha m fica pendurada em um fio muito longo e oscila, realizando pequenas oscilações, em um plano inicialmente fixo. Depois de um tempo, por causa da força de Coriolis, é observado que, na verdade, esse plano gira com velocidade angular dependente da latitude local. Seja $\boldsymbol{\omega}$ a velocidade angular de rotação da Terra em torno de seu eixo. Vou adotar um sistema de coordenadas S, com eixos x, y e z fixos no espaço. Vou escolher o eixo z ao longo do vetor $\boldsymbol{\omega}$, isto é, o eixo de rotação da Terra é batizado de eixo z no sistema de coordenadas S. Seja $\mathbf{r}_0$ a posição de equilíbrio da massinha m, onde "posição de equilíbrio" significa a posição onde o pêndulo não oscila, embora acompanhe o movimento de rotação da Terra. No referencial S, esse vetor posição gira em torno do eixo z com frequência angular ω. Vou escolher a origem do sistema de coordenadas S no centro da Terra.

Agora vou definir um sistema de coordenadas que gira em torno do centro da Terra, S^*, com relação ao qual o vetor posição $\mathbf{r}_0$ fica fixo. Vou tomar o novo eixo z^* como sendo a vertical local, isto é, aquela que é experimentalmente determinada por um fio de prumo na região de interesse, que passa pelo ponto de equilíbrio dado pelo vetor posição $\mathbf{r}_0$.

Como vimos na postagem sobre a equação de movimento na Terra em rotação, a equação de movimento para o vetor posição $\mathbf{r}$ da massinha m no referencial S^* é dada por

$$m\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}_e - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}, \qquad (1)$$

onde

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \qquad (2)$$

O segundo termo no segundo membro da Eq. (2) é a aceleração centrífuga. Uma forma mais familiar desse termo pode ser obtida em coordenadas cilíndricas, escrevendo, no referencial S,

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}} \qquad (3)$$

e

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{z}}. \qquad (4)$$

Então, usando as Eqs. (3) e (4), podemos calcular:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega\hat{\mathbf{z}} \times (\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}) = \rho\omega\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = \rho\omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \rho\omega^2\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\rho\omega^2\hat{\boldsymbol{\rho}}. \qquad (5)$$

Na postagem O fio de prumo e a vertical local vemos que, próximo à superfície da Terra, podemos desprezar a magnitude da aceleração centrífuga, Eq. (5), em comparação com a magnitude da aceleração da gravidade padrão, $|\mathbf{g}|$, de forma que a Eq. (2) pode ser aproximada por

$$\mathbf{g}_e \approx \mathbf{g} \qquad (6)$$

e, escrevendo

$$\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}^*, \qquad (7)$$

a Eq. (1) fica, aproximadamente,

$$m\frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} \approx \mathbf{F} - mg\hat{\mathbf{z}}^* - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}. \qquad (8)$$

Com relação ao referencial S, o versor $\hat{\mathbf{z}}^*$ gira em torno de eixo z com velocidade angular ω e escrevemos:

$$\hat{\mathbf{z}}^* = \hat{\mathbf{x}}\text{sen}\theta\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\text{sen}\theta\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta, \qquad (9)$$

onde θ é o ângulo entre o eixo de rotação da Terra e a vertical que passa pela posição de equilíbrio em $\mathbf{r}_0$. O ângulo θ é chamado de colatitude, isto é, o ângulo entre o eixo de rotação da Terra e os pontos sobre a superfície da Terra com latitude dada por $\pi/2 - \theta$. Vou definir o eixo y^* como aquele que aponta para o norte, com versor

$$\hat{\mathbf{y}}^* = -\hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}\text{sen}\theta, \qquad (10)$$

e vou definir o eixo x^*como aquele que aponta para o leste, com versor

$$\hat{\mathbf{x}}^* = -\hat{\mathbf{x}}\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t). \qquad (11)$$

Note que os versores $\hat{\mathbf{x}}^*$, $\hat{\mathbf{y}}^*$ e $\hat{\mathbf{z}}^*$ são, de fato, ortonormais e, usando as Eqs. (10) e (11), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^* \times \hat{\mathbf{y}}^* &= [-\hat{\mathbf{x}}\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t)] \\ &\times [-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{z}}\text{sen}\theta],\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^* \times \hat{\mathbf{y}}^* &= -\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}\cos\theta\cos^2(\omega t) + \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\text{sen}^2(\omega t) \\ &- \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}}\text{sen}\theta\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}\text{sen}\theta\cos(\omega t),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{x}}^* \times \hat{\mathbf{y}}^* = \hat{\mathbf{z}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\text{sen}\theta\text{sen}(\omega t) + \hat{\mathbf{x}}\text{sen}\theta\cos(\omega t)$$

e, portanto, comparando com a Eq. (9), vemos que

$$\hat{\mathbf{x}}^* \times \hat{\mathbf{y}}^* = \hat{\mathbf{z}}^*. \qquad (12)$$

Pela discussão inicial acima, o vetor $\boldsymbol{\omega}$ é dado pela Eq. (4). Mas $\hat{\mathbf{z}}$ pode ser escrito em termos de suas componentes no referencial S^* como

$$\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}^*)\,\hat{\mathbf{x}}^* + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}}^*)\,\hat{\mathbf{y}}^* + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}^*)\,\hat{\mathbf{z}}^* \qquad (13)$$

Das Eqs. (9), (10) e (11) obtemos

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}^* = \cos\theta, \qquad (14)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}}^* = \mathrm{sen}\theta \qquad (15)$$

e

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}^* = 0. \qquad (16)$$

A substituição das Eqs. (14), (15) e (16) na Eq. (13) produz

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}}^* \mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{z}}^* \cos\theta. \qquad (17)$$

A substituição da Eq. (17) na Eq. (4) dá

$$\boldsymbol{\omega} = \hat{\mathbf{y}}^* \omega \mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{z}}^* \omega \cos\theta. \qquad (18)$$

Vamos pendurar a massinha m de um ponto acima da posição de equilíbrio, $\mathbf{r}_0$, a uma altura igual ao comprimento do fio, ℓ, ao longo da vertical local que define o eixo z^*. Nesse caso, o ponto onde o fio é preso fica na posição

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \ell \hat{\mathbf{z}}^*. \qquad (19)$$

A partir dessa posição $\mathbf{R}$, a posição da massinha m será dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y + \hat{\mathbf{z}}^* s_z. \qquad (20)$$

Então, usando a Eq. (19), podemos reescrever a Eq. (20) como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \ell \hat{\mathbf{z}}^* + \hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y + \hat{\mathbf{z}}^* s_z,$$

isto é,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y + \hat{\mathbf{z}}^* (s_z + \ell). \qquad (21)$$

A força de tensão que o fio exerce sobre a massinha é sempre ao longo do fio e, portanto, a massinha m sofre a ação de uma tensão assim:

$$\mathbf{F} = F \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|},$$

já que o fio se estende desde o ponto $\mathbf{R}$ até o ponto onde fica a massinha m, que é dado pelo vetor posição $\mathbf{r}$. Usando a Eq. (20), concluímos que

$$\mathbf{F} = -F \left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y + \hat{\mathbf{z}}^* s_z}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}} \right). \qquad (22)$$

Neste ponto de nossa discussão é conveniente definirmos o vetor posição da massinha m relativamente ao ponto de equilíbrio, isto é, a partir de $\mathbf{r}_0$. Então, seja

$$\mathbf{s} \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y + \hat{\mathbf{z}}^* \left(s_z + \ell \right) \qquad (23)$$

esse vetor posição relativo à posição de equilíbrio $\mathbf{r}_0$. Note que a coordenada ao longo do eixo z^* do vetor $\mathbf{s}$ não é apenas s_z, mas é definida como $s_z + \ell$. Logo, a Eq. (21) pode ser reescrita como

$$\mathbf{r} \quad = \quad \mathbf{r}_0 + \mathbf{s}. \qquad (24)$$

Substituindo a Eq. (24) na Eq. (8), obtemos

$$m \frac{d^{*2}\mathbf{s}}{dt^2} \quad \approx \quad \mathbf{F} - mg\hat{\mathbf{z}}^* - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{s}}{dt}. \qquad (25)$$

Por definição, a posição de equilíbrio ocorre quando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ e, da Eq. (21) vemos que isso ocorre quando $(s_x, s_y, s_z) = (0, 0, -\ell)$. Agora vamos considerar pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio, já que é esse o caso de um pêndulo de Foucault. Isso quer dizer que $\mathbf{r}$ permanece sempre muito próximo de $\mathbf{r}_0$. Como na posição de equilíbrio s_x e s_y são nulos, então, para pequenos deslocamentos de $\mathbf{r}_0$, s_x e s_y devem permanecer pequenos em módulo. E quanto a s_z, que, na posição de equilíbrio, deve ser igual a $-\ell$? Para responder a essa questão, note que o comprimento do fio, ℓ, é fixo. Portanto, a distância da massinha m até o ponto de suspensão $\mathbf{R}$ deve ser sempre igual a ℓ, para toda posição $\mathbf{r}$ da massinha, isto é,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \quad = \quad \ell. \qquad (26)$$

Usando a Eq. (20), vemos que a Eq. (26) resulta em

$$\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \quad = \quad \ell.$$

Logo,

$$s_z \quad = \quad -\sqrt{\ell^2 - s_x^2 - s_y^2} = -\ell \sqrt{1 - \frac{s_x^2}{\ell^2} - \frac{s_y^2}{\ell^2}}$$

e, portanto,

$$s_z \quad \approx \quad -\ell + \frac{s_x^2}{2\ell} + \frac{s_y^2}{2\ell}. \qquad (27)$$

Note que escolhi s_z negativo, já que estamos analisando sua variação próxima à posição de equilíbrio, que, como vimos, implica em $s_z = -\ell < 0$. Até primeira ordem nos deslocamentos pequenos, s_x e s_y, a Eq. (27) fornesse a aproximação que devemos adotar para s_z :

$$s_z \quad \approx \quad -\ell. \qquad (28)$$

Portanto, substituindo a Eq. (28) na Eq. (23), obtemos $\mathbf{s}$ para pequenos deslocamentos em torno de $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{s} \approx \hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y. \qquad (29)$$

Como a intenção aqui é substituir a Eq. (29) na Eq. (25), calculemos:

$$\frac{d^*\mathbf{s}}{dt} \approx \hat{\mathbf{x}}^* \dot{s}_x + \hat{\mathbf{y}}^* \dot{s}_y. \qquad (30)$$

Portanto, derivando a Eq. (30), obtemos

$$\frac{d^{*2}\mathbf{s}}{dt^2} \approx \hat{\mathbf{x}}^* \ddot{s}_x + \hat{\mathbf{y}}^* \ddot{s}_y. \qquad (31)$$

Das Eqs. (18) e (30), obtemos

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{s}}{dt} \approx (\hat{\mathbf{y}}^* \omega \mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{z}}^* \omega \cos\theta) \times (\hat{\mathbf{x}}^* \dot{s}_x + \hat{\mathbf{y}}^* \dot{s}_y)\,,$$

isto é,

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{s}}{dt} \approx \hat{\mathbf{y}}^* \times \hat{\mathbf{x}}^* \dot{s}_x \omega \mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{z}}^* \times \hat{\mathbf{x}}^* \dot{s}_x \omega \cos\theta + \hat{\mathbf{z}}^* \times \hat{\mathbf{y}}^* \dot{s}_y \omega \cos\theta,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d^*\mathbf{s}}{dt} \approx -\hat{\mathbf{z}}^* \dot{s}_x \omega \mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{y}}^* \dot{s}_x \omega \cos\theta - \hat{\mathbf{x}}^* \dot{s}_y \omega \cos\theta. \qquad (32)$$

Das Eqs. (22), (28) e (29) segue que

$$\mathbf{F} \approx -F\left(\frac{\hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y - \hat{\mathbf{z}}^* \ell}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + \ell^2}}\right) \approx -\frac{F}{\ell}\left(\hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y - \hat{\mathbf{z}}^* \ell\right). \qquad (33)$$

A Eq. (33) é válida para pequenos deslocamentos, mantendo apenas termos de primeira ordem em s_x e s_y.

Agora devemos substituir as Eqs. (30), (31), (32) e (33) na Eq. (25). A componente ao longo do versor $\hat{\mathbf{x}}^*$ fica

$$m\ddot{s}_x \approx -\frac{F}{\ell} s_x + 2m\dot{s}_y \omega \cos\theta. \qquad (34)$$

A componente ao longo do versor $\hat{\mathbf{y}}^*$ fica

$$m\ddot{s}_y \approx -\frac{F}{\ell} s_y - 2m\dot{s}_x \omega \cos\theta. \qquad (35)$$

A componente ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}^*$ fica

$$0 \approx F - mg + 2m\dot{s}_x \omega \mathrm{sen}\theta,$$

isto é,

$$F \approx mg - 2m\dot{s}_x\omega\mathrm{sen}\theta. \qquad (36)$$

Podemos agora substituir a Eq. (36) na Eq. (34) e obter

$$m\ddot{s}_x \approx -\frac{mg - 2m\dot{s}_x\omega\mathrm{sen}\theta}{\ell}s_x + 2m\dot{s}_y\omega\cos\theta. \qquad (37)$$

Portanto, até primeira ordem em s_x e s_y, a Eq. (37) fica

$$m\ddot{s}_x \approx -\frac{mg}{\ell}s_x + 2m\dot{s}_y\omega\cos\theta,$$

isto é,

$$\ddot{s}_x \approx -\frac{g}{\ell}s_x + 2\omega\cos\theta\dot{s}_y. \qquad (38)$$

Analogamente, substituindo a Eq. (36) na Eq. (35), obtemos

$$m\ddot{s}_y \approx -\frac{mg - 2m\dot{s}_x\omega\mathrm{sen}\theta}{\ell}s_y - 2m\dot{s}_x\omega\cos\theta. \qquad (39)$$

Até primeira ordem em s_x e s_y, a Eq. (39) fica

$$m\ddot{s}_y \approx -\frac{mg}{\ell}s_y - 2m\dot{s}_x\omega\cos\theta,$$

ou seja,

$$\ddot{s}_y \approx -\frac{g}{\ell}s_y - 2\omega\cos\theta\dot{s}_x. \qquad (40)$$

Veja que, fazendo $\omega = 0$ nas Eqs. (38) e (40), obtemos um sistema de dois osciladores harmônicos desacoplados, cada um com frequência natural de oscilação dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad (41)$$

Tomando a aceleração da gravidade como

$$g \approx 9,8\mathrm{m/s}^2$$

e o comprimento típico de um pêndulo de Foucault da ordem de

$$\ell \approx 67\mathrm{m},$$

obtemos

$$\frac{g}{\ell} \approx \frac{9,8}{67}\mathrm{s}^{-2} \approx 0,146\mathrm{s}^{-2}$$

e substituindo esse resultado na Eq. (41), obtemos

$$\omega_0 \quad \approx \quad \sqrt{0,146}\mathrm{s}^{-1} \approx 0,382\mathrm{rad\ s}^{-1}. \qquad (42)$$

Essa frequência é muito maior do que a frequência de rotação da Terra, que é da ordem de 7×10^{-5}rad/s, de acordo com a postagem O fio de prumo e a vertical local. Só para considerar essas magnitudes em termos mais intuitivos, o período correspondente à frequência da Eq. (42) é dado por

$$T_0 \quad = \quad \frac{2\pi}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{0,382}\mathrm{s} \approx 16,45\mathrm{s}, \qquad (43)$$

que é muito mais curto do que o período de 24 horas que dura uma rotação da Terra, aproximadamente.

As Eqs. (38) e (40) descrevem um pêndulo que tem seu plano de oscilação girando em torno da vertical com velocidade angular dada por

$$\mathbf{\Omega} \quad = \quad -\omega\cos\theta\hat{\mathbf{z}}^*. \qquad (44)$$

Para ver isso, podemos reescrever as Eqs. (38) e (40) em forma vetorial como

$$\frac{d^{*2}\mathbf{s}}{dt^2} \quad \approx \quad -\omega_0^2\mathbf{s} + 2\mathbf{\Omega} \times \frac{d^*\mathbf{s}}{dt}, \qquad (45)$$

onde já usei a Eq. (44). Agora, com inspiração proveniente do livro do Symon [1], consideremos um referencial S', que gira em torno do eixo z^* com velocidade angular $\mathbf{\Omega}' = \Omega'\hat{\mathbf{z}}^*$ constante, supondo que as origens de S, S^* e S' coincidam. Procedendo de acordo com a postagem Sistemas de coordenadas em movimento, obtemos

$$\frac{d^*\mathbf{s}}{dt} \quad = \quad \frac{d'\mathbf{s}}{dt} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{s} \qquad (46)$$

e

$$\frac{d^{*2}\mathbf{s}}{dt^2} \quad = \quad \frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} + \mathbf{\Omega}' \times \left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{s}\right) + 2\mathbf{\Omega}' \times \frac{d'\mathbf{s}}{dt}. \qquad (47)$$

Substituindo as Eqs. (45) na Eq. (47), obtemos

$$-\omega_0^2\mathbf{s} + 2\mathbf{\Omega} \times \frac{d^*\mathbf{s}}{dt} \quad \approx \quad \frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} + \mathbf{\Omega}' \times \left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{s}\right) + 2\mathbf{\Omega}' \times \frac{d'\mathbf{s}}{dt},$$

isto é, com a substituição da Eq. (46),

$$-\omega_0^2\mathbf{s} + 2\mathbf{\Omega} \times \frac{d'\mathbf{s}}{dt} + 2\mathbf{\Omega} \times \left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{s}\right) \quad \approx \quad \frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} + \mathbf{\Omega}' \times \left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{s}\right) + 2\mathbf{\Omega}' \times \frac{d'\mathbf{s}}{dt},$$

ou seja,

$$\frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} \quad \approx \quad -\omega_0^2\mathbf{s} + \left(-\mathbf{\Omega}' + 2\mathbf{\Omega}\right) \times \left(\mathbf{\Omega}' \times \mathbf{s}\right) + 2\left(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}'\right) \times \frac{d'\mathbf{s}}{dt}. \qquad (48)$$

Escolhendo

$$\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}, \qquad (49)$$

vemos que a Eq. (48) fica

$$\frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} \approx -\omega_0^2\mathbf{s} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}),$$

isto é, usando as Eqs. (29) e (44),

$$\frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} \approx -\omega_0^2\mathbf{s} + \omega^2\cos^2\theta\hat{\mathbf{z}}^* \times [\hat{\mathbf{z}}^* \times (\hat{\mathbf{x}}^* s_x + \hat{\mathbf{y}}^* s_y)],$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} &\approx -\omega_0^2\mathbf{s} + \omega^2\cos^2\theta\hat{\mathbf{z}}^* \times (\hat{\mathbf{y}}^* s_x - \hat{\mathbf{x}}^* s_y) \\ &= -\omega_0^2\mathbf{s} + \omega^2\cos^2\theta\,(-\hat{\mathbf{x}}^* s_x - \hat{\mathbf{y}}^* s_y),\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{d'^2\mathbf{s}}{dt^2} \approx -\left(\omega_0^2 + \omega^2\cos^2\theta\right)\mathbf{s}. \qquad (50)$$

A Eq. (50), no sistema de coordenadas que gira em torno de z^* com velocidade angular $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$, é uma equação de movimento que não apresenta a força de Coriolis. Além disso, a Eq. (50) descreve o movimento de um oscilador harmônico bidimensional no plano $x'y'$, com frequência natural dada por $\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2\cos^2\theta}$. Nesse sistema de coordenadas, se o pêndulo inicia suas oscilações em um plano fixo, então, pela Eq. (50), permanece oscilando no mesmo plano. No sistema de coordenadas S', portanto, o plano de oscilação do pêndulo de Foucault permanece fixo. Logo, como o sistema de coordenadas S' gira com velocidade angular $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$ com relação ao sistema de coordenadas S^*, segue que o plano de oscilação do pêndulo de Foucault também gira com velocidade angular $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$ com relação ao sistema de coordenadas S^*, exibindo concordância com as observações empíricas.

Bibliografia

[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, terceira edição (Addison Wesley, 1971).