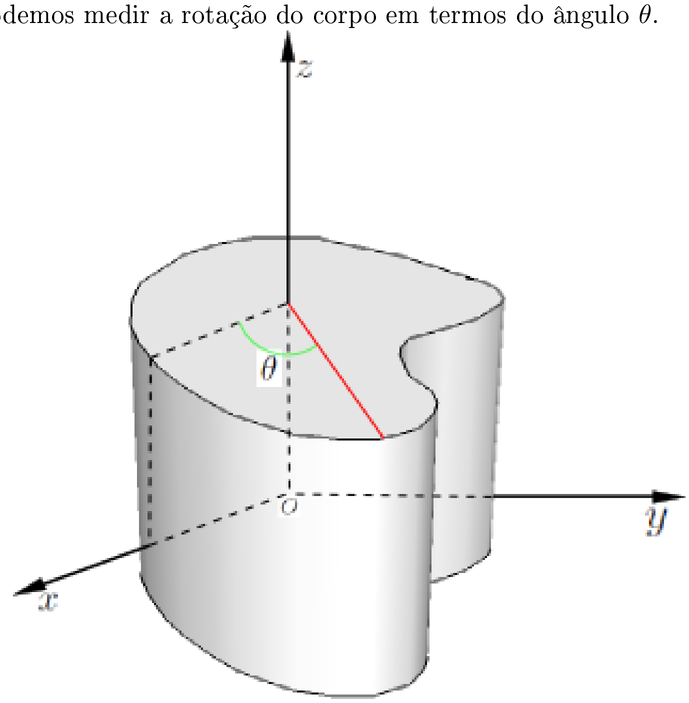
Rotação em torno de um eixo

Um corpo rígido é definido como um conjunto de partículas cujas distâncias entre si mantêm-se fixas, mesmo que o corpo como um todo movimente-se. Uma rotação em torno de um eixo acontece quando o corpo rígido gira em torno de um eixo fixo no espaço, que vou escolher como o eixo z. Nesse caso, o movimento do corpo é descrito por um único ângulo. Para ver isso, imagine um segmento de linha reta fixo no corpo rígido, que seja perpendicular ao eixo de rotação que, neste caso, é o eixo z. Seja θ o ângulo entre o plano xz e a linha reta que contêm o segmento de reta fixo no corpo rígido. Esse ângulo descreve a posição do corpo rígido. O segmento vermelho na figura abaixo ilustra como podemos medir a rotação do corpo em termos do ângulo θ.



Em coordenadas cilíndricas, seja r_k a distântica da k-ésima partícula do corpo rígido até o eixo z. Suponha que essa partícula tem massa m_k. Também suponha que o ângulo θ_k seja aquele que o plano xz faz com o plano que contém a k-ésima partícula e o eixo z. Então, o momentum angular dessa partícula, com relação ao eixo z, é dado por

$$\mathbf{L}_k = m_k r_k \left(r_k \dot{\theta}_k \right) \hat{\mathbf{z}},$$

onde $r_k \dot{\theta}_k$ é a velocidade da k-ésima partícula, que é puramente tangencial, já que o movimento é, por hipótese, apenas uma rotação em torno do eixo z. Se o corpo rígido é constituído de N partículas, seu momentum angular com relação ao eixo z é dado por

$$\mathbf{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \dot{\theta}_k \hat{\mathbf{z}}.$$

Como o corpo é rígido, a velocidade angular de todas as partículas é idêntica e, portanto,

$$\mathbf{L} = \left(\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \right) \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}},$$

onde $\dot{\theta}$ é a velocidade angular do corpo rígido. A quantidade entre parênteses,

$$I_z = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2,$$

é denominada de momento de inércia do corpo rígido com relação ao eixo de rotação z. O torque sobre o corpo rígido é, portanto,

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_z \ddot{\theta} \hat{\mathbf{z}}.$$

No caso de um corpo rígido contínuo, de massa total M e densidade ρ, podemos escrever o momento de inércia com relação ao eixo z como

$$I_z = \int d^3r \quad \rho\left(r, \theta, z\right) r^2,$$

onde d^3r é o elemento de volume e a integral deve ser feita sobre todo o volume do corpo rígido.