Espalhamento de Rutherford entre duas partículas

Usando a abordagem de apenas um corpo, já apresentei o espalhamento de uma partícula carregada por outra de mesmo sinal de carga, fixa na origem, na postagem sobre a seção de choque diferencial de Rutherford. No entanto, tipicamente as duas partículas podem mover-se e, nesse caso, precisamos da abordagem de dois corpos. Aqui vou apresentar a relação entre o referencial do centro de massa e o referencial do laboratório.

Referencial do laboratório

Seja $\mathbf{v}_0$ a velocidade inicial da partícula de massa m_1, que incide sobre a partícula alvo, de massa m_2, inicialmente em repouso no referencial do laboratório. Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ os vetores posição das partículas de massas m_1 e m_2, respectivamente, com relação ao referencial do laboratório. Depois da colisão, a partícula de massa m_1 é espalhada com velocidade final $\mathbf{v}_1$. O ângulo de espalhamento, θ, é obtido através do produto escalar entre as velocidades inicial e final da partícula de massa m_1, isto é,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1}{v_0\,|\mathbf{v}_1|}, \qquad (1)$$

onde $v_0 = |\mathbf{v}_0|$.

Referencial do centro de massa

As coordenadas do centro de massa são dadas por

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}, \qquad (2)$$

onde

$$M = m_1 + m_2. \qquad (3)$$

As coordenadas relativas à partícula alvo são dadas por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \qquad (4)$$

e a massa reduzida é dada por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

As coordenadas do centro de massa das partículas de massas m_1 e m_2 são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} = \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \qquad (6)$$

e

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}, \qquad (7)$$

onde usei as Eqs. (2), (3) e (4). Veja que os vetores posição $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ dão as coordenadas das partículas incidente e alvo com relação à posição do centro de massa que, nesse referencial, é a origem.

O espalhamento da partícula reduzida

As coordenadas da partícula reduzida são medidas com respeito à posição $\mathbf{r}_2$, da partícula alvo, e são dadas pela Eq. (4). Nesse referencial, antes da colisão, a partícula reduzida também tem velocidade inicial $\mathbf{v}_0$, pois a partícula alvo está inicialmente parada no referencial do laboratório e permanece sempre parada no seu referencial, que é, por definição, o mesmo da partícula reduzida. Para você ver isso, basta tomar a derivada temporal da Eq. (4), que dá

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

isto é,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2. \qquad (8)$$

No tempo inicial $t = 0$, quando as partículas estão muitíssimo distantes,

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) - \dot{\mathbf{r}}_2(0),$$

que, antes da colisão, dá

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 - \mathbf{0} = \mathbf{v}_0,$$

como antecipado intuitivamente. Após a colisão, no entanto, a partícula reduzida, de massa μ, terá uma velocidade relativa à partícula alvo dada por $\dot{\mathbf{r}}(\infty)$. Nesse referencial da partícula alvo, o ângulo de espalhamento é denotado por Θ e é obtido, em termos das velocidades, como

$$\cos\Theta = \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}(\infty)}{v_0\,|\dot{\mathbf{r}}(\infty)|}. \qquad (9)$$

Na ausência de forças externas, o movimento nesse referencial se dá como se a partícula reduzida fosse espalhada por uma força central a partir da origem do sistema de coordenadas relativas, isto é, a partir da posição da partícula alvo, de massa m_2. Nessas circunstâncias, o resultado desse espalhamento, para duas cargas q_1 e q_2, conforme calculado na postagem sobre a seção de choque diferencial de Rutherford, é

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi\left(\frac{q_1q_2}{2\mu v_0^2}\right)^2 \frac{\mathrm{sen}\Theta}{\mathrm{sen}^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}, \qquad (10)$$

já que naquela postagem a hipótese era a de que uma partícula fosse espalhada por um centro espalhador fixo na origem, que é exatamente o caso no referencial fixo sobre a partícula alvo. Agora precisamos expressar o resultado da Eq. (10) em termos do ângulo θ.

Ângulo de espalhamento no referencial do laboratório e no referencial do centro de massa

Da Eq. (9), vemos que precisamos calcular a velocidade assintótica da partícula reduzida, $\dot{\mathbf{r}}(\infty)$, para podermos ter a relação com a velocidade da partícula de massa m_1 no referencial do laboratório. Para isso, note que a Eq. (8) fornece

$$\dot{\mathbf{r}}(\infty) = \dot{\mathbf{r}}_1(\infty) - \dot{\mathbf{r}}_2(\infty). \qquad (11)$$

Mas, como foi dito antes da Eq. (1),

$$\dot{\mathbf{r}}_1(\infty) = \mathbf{v}_1. \qquad (12)$$

Das Eqs. (7) e (11) segue que

$$\dot{\mathbf{r}}_2(\infty) - \dot{\mathbf{R}}(\infty) = -\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}(\infty) = -\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}_1(\infty) + \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}_2(\infty),$$

isto é,

$$\left(1 - \frac{m_1}{M}\right)\dot{\mathbf{r}}_2(\infty) = \dot{\mathbf{R}}(\infty) - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}_1(\infty),$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{r}}_2(\infty) = \frac{M}{m_2}\dot{\mathbf{R}}(\infty) - \frac{m_1}{m_2}\dot{\mathbf{r}}_1(\infty). \qquad (13)$$

Na ausência de forças externas, a velocidade do centro de massa é constante e, portanto,

$$\dot{\mathbf{R}}(\infty) = \dot{\mathbf{R}}(0) = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1(0) + m_2\dot{\mathbf{r}}_2(0)}{M} = \frac{m_1\mathbf{v}_0}{M}, \qquad (14)$$

onde usei a Eq. (2) e o fato de que a velocidade inicial da partícula de massa m_1 é $\mathbf{v}_0$ e a da partícula de massa m_2 é nula. Substituindo a Eq. (14) na Eq. (13) e usando a Eq. (12) vem

$$\dot{\mathbf{r}}_2(\infty) = \frac{M}{m_2}\frac{m_1\mathbf{v}_0}{M} - \frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_1 = \frac{m_1}{m_2}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1). \qquad (15)$$

Substituindo as Eqs. (12) e (15) na Eq. (11) resulta em

$$\dot{\mathbf{r}}(\infty) = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1}{m_2}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\mathbf{v}_1 - \frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_0 = \frac{M}{m_2}\mathbf{v}_1 - \frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}_0,$$

isto é,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}(\infty) + \frac{m_1}{M}\mathbf{v}_0 \qquad (16)$$

onde também usei a Eq. (3). Substituindo a Eq. (16) na Eq. (1), obtemos

$$\cos\theta = \frac{m_2\mathbf{v}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}(\infty) + m_1 v_0^2}{M v_0 |\mathbf{v}_1|}. \qquad (17)$$

Usando a Eq. (9), podemos reescrever a Eq. (17) assim:

$$\cos\theta = \frac{m_2 v_0 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \cos\Theta + m_1 v_0^2}{M v_0 \left|\mathbf{v}_1\right|} = \frac{m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \cos\Theta + m_1 v_0}{M \left|\mathbf{v}_1\right|}. \tag{18}$$

Segue da Eq. (18) que

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{\left(m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \cos\Theta + m_1 v_0\right)^2}{M^2 \left|\mathbf{v}_1\right|^2},$$

isto é, usando a Eq. (16),

$$\text{sen}^2\theta = \frac{\left|m_2 \dot{\mathbf{r}}(\infty) + m_1 \mathbf{v}_0\right|^2 - \left(m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \cos\Theta + m_1 v_0\right)^2}{M^2 \left|\mathbf{v}_1\right|^2},$$

ou seja,

$$\text{sen}^2\theta = \frac{m_2^2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right|^2 \left(1 - \cos^2\Theta\right)}{M^2 \left|\mathbf{v}_1\right|^2} = \frac{m_2^2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right|^2 \text{sen}^2\Theta}{M^2 \left|\mathbf{v}_1\right|^2},$$

ou ainda, extraindo a raiz quadrada,

$$\text{sen}\theta = \frac{m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \text{sen}\Theta}{M \left|\mathbf{v}_1\right|}. \tag{19}$$

A divisão da Eq. (19) pela Eq. (18) fornece

$$\text{tg}\theta = \frac{m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \text{sen}\Theta}{m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right| \cos\Theta + m_1 v_0},$$

isto é,

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\Theta}{\cos\Theta + \frac{m_1 v_0}{m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right|}}. \tag{20}$$

Nos livros-texto [1], a tgθ é expressa em termos dos valores da velocidade relativa da partícula incidente. Assim, usando a Eq. (6), observe que

$$\dot{\mathbf{s}}_1(0) = \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}(0) = \frac{m_2}{M}\mathbf{v}_0 \tag{21}$$

e

$$\dot{\mathbf{s}}_1(\infty) = \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}(\infty). \tag{22}$$

Dividindo o módulo da Eq. (21) pelo módulo da Eq. (22) fornece

$$\frac{v_0}{\left|\dot{\mathbf{r}}(\infty)\right|} = \frac{\left|\dot{\mathbf{s}}_1(0)\right|}{\left|\dot{\mathbf{s}}_1(\infty)\right|}. \tag{23}$$

Com a substituição da Eq. (23) na Eq. (20) ficamos com

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\Theta}{\cos\Theta + \frac{m_1 \left|\dot{\mathbf{s}}_1(0)\right|}{m_2 \left|\dot{\mathbf{s}}_1(\infty)\right|}}. \tag{24}$$

O caso de colisões elásticas

Quando a colisão é elástica, a energia cinética total é conservada. Na postagem sobre dois corpos, mostrei que a energia cinética total pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Como a velocidade do centro de massa é constante na ausência de forças externas, segue que

$$\frac{1}{2}\mu\left[\dot{\mathbf{r}}\left(0\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\mu\left[\dot{\mathbf{r}}\left(\infty\right)\right]^2,$$

isto é,

$$v_0^2 = \left[\dot{\mathbf{r}}\left(\infty\right)\right]^2$$

e, da Eq. (23), segue que

$$\frac{\left|\dot{\mathbf{s}}_1\left(0\right)\right|}{\left|\dot{\mathbf{s}}_1\left(\infty\right)\right|} = 1. \qquad (25)$$

Usando a Eq. (25) na Eq. (24) dá

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{sen}\Theta}{\cos\Theta + \frac{m_1}{m_2}}. \qquad (26)$$

Seção de choque diferencial para massas iguais

Agora vou expressar a Eq. (10) em termos do ângulo θ. Para isso, escrevemos a Eq. (10) assim:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi\left(\frac{q_1 q_2}{2\mu v_0^2}\right)^2 \frac{\mathrm{sen}\Theta}{\mathrm{sen}^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}\frac{d\Theta}{d\theta}. \qquad (27)$$

Para $m_1 = m_2$, segue da Eq. (26) que

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{sen}\Theta}{\cos\Theta + 1} = \frac{2\mathrm{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) + 1},$$

isto é,

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{2\mathrm{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)} = \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)} = \mathrm{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

e, portanto,

$$\Theta = 2\theta. \qquad (28)$$

Substituindo a Eq. (28) na Eq. (27) resulta em

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi \left(\frac{q_1 q_2}{2\mu v_0^2}\right)^2 \frac{\mathrm{sen}\,(2\theta)}{\mathrm{sen}^4\theta} 2,$$

isto é,

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 8\pi \left(\frac{q_1 q_2}{2\mu v_0^2}\right)^2 \frac{\mathrm{sen}\theta \cos\theta}{\mathrm{sen}^4\theta}. \qquad (29)$$

References

[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, terceira edição (Addison Wesley, 1971).