Dois osciladores harmônicos acoplados sem matrizes

Na postagem sobre dois osciladores acoplados resolvi o sistema de equações diferenciais acopladas usando uma descrição matricial. Como é reconhecido o fato de que nem todo estudante de graduação sabe lidar com matrizes sem ter pânico, vou resolver o mesmo problema aqui sem usar matrizes. As duas equações diferenciais que queremos resolver são escritas como

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_1+k_3}{m_1}x_1 - \frac{k_3}{m_1}x_2 \qquad (1)$$

e

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k_2+k_3}{m_2}x_2 - \frac{k_3}{m_2}x_1, \qquad (2)$$

onde m_1, m_2, k_1, k_2 e k_3 são constantes reais positivas. O objetivo nesta postagem não é simplesmente uma ginástica matemática, o que almejamos é o objetivo muitíssimo prático de desacoplar as Eqs. (1) e (2). Para resolver esse sistema de equações acopladas, a única coisa que podemos fazer é multiplicar a Eq. (1) por uma constante, digamos a, multiplicar a Eq. (2) por outra constante, digamos b, e, finalmente, somar as duas equações resultantes na esperança de obter uma equação independente. Então, procedendo como acabei de descrever, obtemos

$$a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2 = -\frac{k_1+k_3}{m_1}ax_1 - \frac{k_3}{m_1}ax_2 - \frac{k_2+k_3}{m_2}bx_2 - \frac{k_3}{m_2}bx_1,$$

isto é,

$$\frac{d^2}{dt^2}(ax_1+bx_2) = -\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}a + \frac{k_3}{m_2}b\right)x_1 - \left(\frac{k_3}{m_1}a + \frac{k_2+k_3}{m_2}b\right)x_2. \qquad (3)$$

A Eq. (3) só pode ser considerada desacoplada se no seu membro direito aparecer a mesma variável, ax_1+bx_2, que aparece no seu membro esquerdo. No membro direito já temos uma combinação linear de x_1 e x_2 e, portanto, basta exigirmos que

$$\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}a + \frac{k_3}{m_2}b\right)x_1 + \left(\frac{k_3}{m_1}a + \frac{k_2+k_3}{m_2}b\right)x_2 = h\,(ax_1+bx_2), \qquad (4)$$

onde h é uma constante de proporcionalidade. Com a Eq. (4), podemos reescrever a Eq. (3) assim:

$$\frac{d^2}{dt^2}(ax_1+bx_2) = -h\,(ax_1+bx_2), \qquad (5)$$

cuja solução podemos encontrar em termos de h, mas vou deixar essa parte para depois. Como a Eq. (4) deve ser válida para todos os valores que x_1 e x_2 podem assumir ao longo de sua evolução temporal, devemos ter

$$\frac{k_1+k_3}{m_1}a+\frac{k_3}{m_2}b \quad = \quad ha \qquad (6)$$

e

$$\frac{k_3}{m_1}a+\frac{k_2+k_3}{m_2}b \quad = \quad hb. \qquad (7)$$

Note que nem a nem b pode ser zero; caso contrário, se a for zero, por exemplo, então a Eq. (3) fica igualzinha a Eq. (2), só que multiplicada por b nos dois membros. Como a e b não são zero, podemos resolver para b a Eq. (7), isto é,

$$b \quad = \quad \frac{\frac{k_3}{m_1}a}{h-\frac{k_2+k_3}{m_2}},$$

substituir o resultado na Eq. (6), ou seja,

$$\frac{k_1+k_3}{m_1}a+\frac{k_3}{m_2}\left(\frac{\frac{k_3}{m_1}a}{h-\frac{k_2+k_3}{m_2}}\right) \quad = \quad ha,$$

e, depois, dividir ambos os membros por a :

$$\frac{k_1+k_3}{m_1}+\frac{\frac{k_3^2}{m_1m_2}}{h-\frac{k_2+k_3}{m_2}} \quad = \quad h. \qquad (8)$$

Podemos rearranjar a Eq. (8) para obter uma equação quadrática para h, isto é,

$$\frac{k_1+k_3}{m_1}\left(h-\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)+\frac{k_3^2}{m_1m_2} \quad = \quad h\left(h-\frac{k_2+k_3}{m_2}\right),$$

ou seja,

$$\frac{k_1+k_3}{m_1}h-\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}\right)\left(\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)+\frac{k_3^2}{m_1m_2} \quad = \quad h^2-\frac{k_2+k_3}{m_2}h,$$

ou ainda,

$$h^2-\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}+\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)h+\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}\right)\left(\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)-\frac{k_3^2}{m_1m_2} \quad = \quad 0,$$

que pode ser também escrita como

$$h^2-\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}+\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)h+\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_3k_2}{m_1m_2} \quad = \quad 0,$$

cujas soluções algébricas são

$$h_+ \quad = \quad \frac{k_1+k_3}{2m_1}+\frac{k_2+k_3}{2m_2}+\Upsilon \qquad (9)$$

e

$$h_- = \frac{k_1+k_3}{2m_1}+\frac{k_2+k_3}{2m_2}-\Upsilon, \qquad (10)$$

onde, como na postagem sobre dois osciladores acoplados tratados matricialmente, definimos

$$\Upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}+\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2-4\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_3k_2}{m_1m_2}} \qquad (11)$$

para simplificar a notação. Podemos reescrever a Eq. (11) da seguinte forma:

$$\Upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}\right)^2+2\frac{(k_1+k_3)(k_2+k_3)}{m_1m_2}+\left(\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2-4\frac{(k_1+k_3)(k_2+k_3)-k_3^2}{m_1m_2}},$$

isto é,

$$\Upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}\right)^2-2\frac{(k_1+k_3)(k_2+k_3)}{m_1m_2}+\left(\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2+4\frac{k_3^2}{m_1m_2}},$$

ou seja,

$$\Upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}-\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2+4\frac{k_3^2}{m_1m_2}}, \qquad (12)$$

que mostra que Υ é uma grandeza real. Além disso, veja que o número no radical da Eq. (11) é positivo, pois é o mesmo número do radical da Eq. (12). Então, por sua vez, a Eq. (11) mostra que Υ tem o módulo menor do que a soma dos dois primeiros termos aparecendo em cada uma das Eqs. (9) e (10). Isso implica que h_+ e h_- são ambos números reais positivos. Como temos duas soluções possíveis para a constante h, segue das Eqs. (6) e (7) que teremos duas soluções para a e para b, isto é, teremos h_+ definindo a_+ e b_+ e h_- definindo a_- e b_-. Como o sistema formado pelas Eqs. (6) e (7) é indeterminado para cada um dos valores de h, segue que podemos tomar, por exemplo, $a_+ = a_- = 1$ e concluir, da Eq. (6), que

$$b_+ = \frac{h_+ - \frac{k_1+k_3}{m_1}}{\frac{k_3}{m_2}} \qquad (13)$$

e

$$b_- = \frac{h_- - \frac{k_1+k_3}{m_1}}{\frac{k_3}{m_2}}. \qquad (14)$$

Usando a Eq. (5), então, concluímos que

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+b_+x_2) = -h_+(x_1+b_+x_2) \qquad (15)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(x_1 + b_- x_2\right) = -h_-\left(x_1 + b_- x_2\right), \qquad (16)$$

que são duas equações diferenciais desacopladas, uma na variável $x_1 + b_+ x_2$ e outra na variável $x_1 + b_- x_2$.

Para simplificar as contas, sejam

$$s_+ = x_1 + b_+ x_2 \qquad (17)$$

e

$$s_- = x_1 + b_- x_2. \qquad (18)$$

As Eqs. (15) e (17) fornecem

$$\frac{d^2}{dt^2} s_+ = -h_+ s_+,$$

cuja solução geral é dada por

$$s_+ = A_+ \cos\left(\sqrt{h_+} t\right) + B_+ \mathrm{sen}\left(\sqrt{h_+} t\right), \qquad (19)$$

onde A_+ e B_+ são constantes a ser determinadas a partir das condições iniciais, conforme o procedimento seguinte. Então, tomemos a derivada temporal da Eq. (19):

$$\dot{s}_+ = -\sqrt{h_+} A_+ \mathrm{sen}\left(\sqrt{h_+} t\right) + \sqrt{h_+} B_+ \cos\left(\sqrt{h_+} t\right). \qquad (20)$$

Em $t = 0$, as Eqs. (19) e (20) fornecem

$$s_+(0) = A_+ = x_1(0) + b_+ x_2(0), \qquad (21)$$

onde usei a Eq. (17) em $t = 0$, e

$$\dot{s}_+(0) = \sqrt{h_+} B_+ = \dot{x}_1(0) + b_+ \dot{x}_2(0),$$

que dá

$$B_+ = \frac{\dot{x}_1(0) + b_+ \dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_+}}, \qquad (22)$$

onde usei a derivada temporal da Eq. (17) em $t = 0$. De forma análoga, as Eqs. (16) e (18) fornecem

$$s_- = A_- \cos\left(\sqrt{h_-} t\right) + B_- \mathrm{sen}\left(\sqrt{h_-} t\right), \qquad (23)$$

onde A_- e B_- são determinadas pelas condições iniciais assim:

$$A_- = x_1(0) + b_- x_2(0), \qquad (24)$$

e

$$B_- = \frac{\dot{x}_1(0) + b_-\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}}. \qquad (25)$$

Para escrevermos a resposta final, agora só falta invertermos as Eqs. (17) e (18) e obtermos x_1 e x_2 em termos de s_+ e s_-. Para tanto, basta multiplicarmos a Eq. (17) por b_-, isto é,

$$b_-s_+ = b_-x_1 + b_-b_+x_2,$$

multiplicar a Eq. (18) por b_+, ou seja,

$$b_+s_- = b_+x_1 + b_+b_-x_2,$$

e subtrairmos uma da outra, resultando em

$$b_+s_- - b_-s_+ = (b_+ - b_-)\, x_1,$$

ou ainda,

$$x_1 = \frac{b_+s_- - b_-s_+}{b_+ - b_-}. \qquad (26)$$

Substituindo a Eq. (26) na Eq. (17) dá

$$s_+ = \frac{b_+s_- - b_-s_+}{b_+ - b_-} + b_+x_2,$$

isto é,

$$b_+x_2 = s_+ - \frac{b_+s_- - b_-s_+}{b_+ - b_-},$$

ou seja,

$$b_+x_2 = \frac{s_+b_+ - s_+b_- - b_+s_- + b_-s_+}{b_+ - b_-},$$

ou ainda,

$$x_2 = \frac{s_+ - s_-}{b_+ - b_-}. \qquad (27)$$

Agora a explicitação da solução deste problema é obtida diretamente de substituições. Então, substituindo as Eqs. (19) e (23) na Eq. (26) dá

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_+}{b_+ - b_-}\left[A_- \cos\left(\sqrt{h_-}t\right) + B_-\mathrm{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right)\right] \\ &- \frac{b_-}{b_+ - b_-}\left[A_+ \cos\left(\sqrt{h_+}t\right) + B_+\mathrm{sen}\left(\sqrt{h_+}t\right)\right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_+}{b_+ - b_-}\left[\left(x_1(0) + b_- x_2(0)\right)\cos\left(\sqrt{h_-}t\right) + \frac{\dot{x}_1(0) + b_-\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right)\right] \\ &- \frac{b_-}{b_+ - b_-}\left[\left(x_1(0) + b_+ x_2(0)\right)\cos\left(\sqrt{h_+}t\right) + \frac{\dot{x}_1(0) + b_+\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_+}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_+}t\right)\right], \end{aligned} \tag{28}$$

onde substituí as Eqs. (21), (22), (24) e (25). Substituindo as Eqs. (19) e (23) na Eq. (27) dá

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{b_+ - b_-}\left[A_-\cos\left(\sqrt{h_-}t\right) + B_-\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right)\right] \\ &- \frac{1}{b_+ - b_-}\left[A_-\cos\left(\sqrt{h_-}t\right) + B_-\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right)\right], \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{b_+ - b_-}\left[\left(x_1(0) + b_+ x_2(0)\right)\cos\left(\sqrt{h_+}t\right) + \frac{\dot{x}_1(0) + b_+\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_+}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_+}t\right)\right] \\ &- \frac{1}{b_+ - b_-}\left[\left(x_1(0) + b_- x_2(0)\right)\cos\left(\sqrt{h_-}t\right) + \frac{\dot{x}_1(0) + b_-\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right)\right], \end{aligned} \tag{29}$$

onde substituí as Eqs. (21), (22), (24) e (25).

Vou agora mostrar que a solução apresentada na postagem sobre dois osciladores acoplados pelo método matricial, isto é,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \left[\frac{\frac{\delta}{\gamma}x_1(0) - x_2(0)}{\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\lambda_1}t\right) + \frac{\frac{\delta}{\gamma}\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_1}t\right)\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix} \\ &+ \left[\frac{x_2(0) - \frac{\beta}{\alpha}x_1(0)}{\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\lambda_2}t\right) + \frac{\dot{x}_2(0) - \frac{\beta}{\alpha}\dot{x}_1(0)}{\sqrt{\lambda_2}\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_2}t\right)\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{\gamma} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{30}$$

é a mesma da presente postagem. Efetuando a multiplicação matricial indicada na Eq. (30), obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\frac{\delta}{\gamma}x_1(0) - x_2(0)}{\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\lambda_1}t\right) + \frac{\frac{\delta}{\gamma}\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_1}t\right) \\ &+ \frac{x_2(0) - \frac{\beta}{\alpha}x_1(0)}{\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\lambda_2}t\right) + \frac{\dot{x}_2(0) - \frac{\beta}{\alpha}\dot{x}_1(0)}{\sqrt{\lambda_2}\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_2}t\right) \end{aligned} \tag{31}$$

e

$$x_2 = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}x_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}x_2(0)}{\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\lambda_1}t\right) + \frac{\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}\dot{x}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\dot{x}_2(0)}{\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta}{\alpha}\right)}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_1}t\right)$$

$$+\quad \frac{\frac{\delta}{\gamma}x_2(0)-\frac{\delta}{\gamma}\frac{\beta}{\alpha}x_1(0)}{\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}}\cos\left(\sqrt{\lambda_2}t\right)+\frac{\frac{\delta}{\gamma}\dot{x}_2(0)-\frac{\delta}{\gamma}\frac{\beta}{\alpha}\dot{x}_1(0)}{\sqrt{\lambda_2}\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}\right)}\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda_2}t\right). \tag{32}$$

Para podermos comparar essas equações com os resultados da presente postagem, note que, na postagem sobre dois osciladores acoplados pelo método matricial,

$$\lambda_1 = \frac{k_1+k_3}{2m_1}+\frac{k_2+k_3}{2m_2}-\Upsilon=h_-,$$

pela Eq. (10),

$$\lambda_2 = \frac{k_1+k_3}{2m_1}+\frac{k_2+k_3}{2m_2}+\Upsilon=h_+,$$

pela Eq. (9),

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{k_2+k_3}{2m_2}-\frac{k_1+k_3}{2m_1}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}-\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2+4\frac{k_3^2}{m_1m_2}}}{\frac{k_3}{m_1}}=b_-,$$

pela Eq. (14) e

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\frac{k_2+k_3}{2m_2}-\frac{k_1+k_3}{2m_1}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}-\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2+4\frac{k_3^2}{m_1m_2}}}{\frac{k_3}{m_1}}=b_+,$$

pela Eq. (13). Com essas correspondências, podemos reescrever a Eq. (31) como

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_+x_1(0)-x_2(0)}{b_+-b_-}\cos\left(\sqrt{h_-}t\right)+\frac{b_+\dot{x}_1(0)-\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}(b_+-b_-)}\mathrm{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right) \\ &+ \frac{x_2(0)-b_-x_1(0)}{b_+-b_-}\cos\left(\sqrt{h_+}t\right)+\frac{\dot{x}_2(0)-b_-\dot{x}_1(0)}{\sqrt{h_+}(b_+-b_-)}\mathrm{sen}\left(\sqrt{h_+}t\right). \end{aligned} \tag{33}$$

Note agora que, pelas Eqs. (9), (10), (11), (12), (13) e (14), segue que

$$b_+b_- = \frac{\left[\left(\frac{k_2+k_3}{2m_2}-\frac{k_1+k_3}{2m_1}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{k_1+k_3}{m_1}-\frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2-\frac{k_3^2}{m_1m_2}\right]}{\left(\frac{k_3}{m_1}\right)^2}=-1. \tag{34}$$

Substituindo a Eq. (34) na Eq. (33) dá

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_+}{b_+-b_-}\left[(x_1(0)+b_-x_2(0))\cos\left(\sqrt{h_-}t\right)+\frac{\dot{x}_1(0)+b_-\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}}\mathrm{sen}\left(\sqrt{h_-}t\right)\right] \\ &- \frac{b_-}{b_+-b_-}\left[(x_1(0)+b_+x_2(0))\cos\left(\sqrt{h_+}t\right)+\frac{\dot{x}_1(0)+b_+\dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_+}}\mathrm{sen}\left(\sqrt{h_+}t\right)\right], \end{aligned}$$

que é exatamente a Eq. (28). Trocando os nomes das constantes na Eq. (32), obtemos

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{b_- b_+ x_1(0) - b_- x_2(0)}{b_+ - b_-} \cos\left(\sqrt{h_-} t\right) + \frac{b_- b_+ \dot{x}_1(0) - b_- \dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}(b_+ - b_-)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-} t\right) \\ &+ \frac{b_+ x_2(0) - b_+ b_- x_1(0)}{b_+ - b_-} \cos\left(\sqrt{h_+} t\right) + \frac{b_+ \dot{x}_2(0) - b_+ b_- \dot{x}_1(0)}{\sqrt{h_+}(b_+ - b_-)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_+} t\right), \end{aligned}$$

que, usando a Eq. (34), dá

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-x_1(0) - b_- x_2(0)}{b_+ - b_-} \cos\left(\sqrt{h_-} t\right) + \frac{-\dot{x}_1(0) - b_- \dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}(b_+ - b_-)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-} t\right) \\ &+ \frac{b_+ x_2(0) + x_1(0)}{b_+ - b_-} \cos\left(\sqrt{h_+} t\right) + \frac{b_+ \dot{x}_2(0) + \dot{x}_1(0)}{\sqrt{h_+}(b_+ - b_-)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_+} t\right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{b_+ - b_-} \left[(x_1(0) + b_- x_2(0)) \cos\left(\sqrt{h_-} t\right) + \frac{\dot{x}_1(0) + b_- \dot{x}_2(0)}{\sqrt{h_-}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_-} t\right) \right] \\ &+ \frac{1}{b_+ - b_-} \left[(b_+ x_2(0) + x_1(0)) \cos\left(\sqrt{h_+} t\right) + \frac{b_+ \dot{x}_2(0) + \dot{x}_1(0)}{\sqrt{h_+}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{h_+} t\right) \right], \end{aligned}$$

que é exatamente a Eq. (29).