A seção de choque diferencial de Rutherford

Qual é o ângulo de deflexão quando a partícula passa por um centro de força repulsiva? Nesse caso, quando tratamos as trajetórias sob a ação de forças centrais proporcionais ao inverso do quadrado da distância, vimos que a trajetória é dada por

$$r = \frac{a\left(e^2-1\right)}{-1+e\cos\theta},$$

onde

$$a\left(e^2-1\right) = \frac{L^2}{mK}$$

e

$$e = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{mK^2}}.$$

Note que, agora, $E > 0$, já que $K = q_1q_2 > 0$ e que r vai a infinito quando θ se aproxima dos valores

$$\theta_\pm = \pm\arccos\left(\frac{1}{e}\right).$$

A partir da direção original de aproximação da partícula, digamos θ_-, a nova direção torna-se θ_+. Caso não houvesse um centro espalhador na origem, a partícula **não** passaria pela origem, mas por uma reta a uma distância s da origem e continuaria ao longo dessa reta paralela à assíntota de equação polar dada por

$$\theta = \pi+\theta_- = \pi-\arccos\left(\frac{1}{e}\right).$$

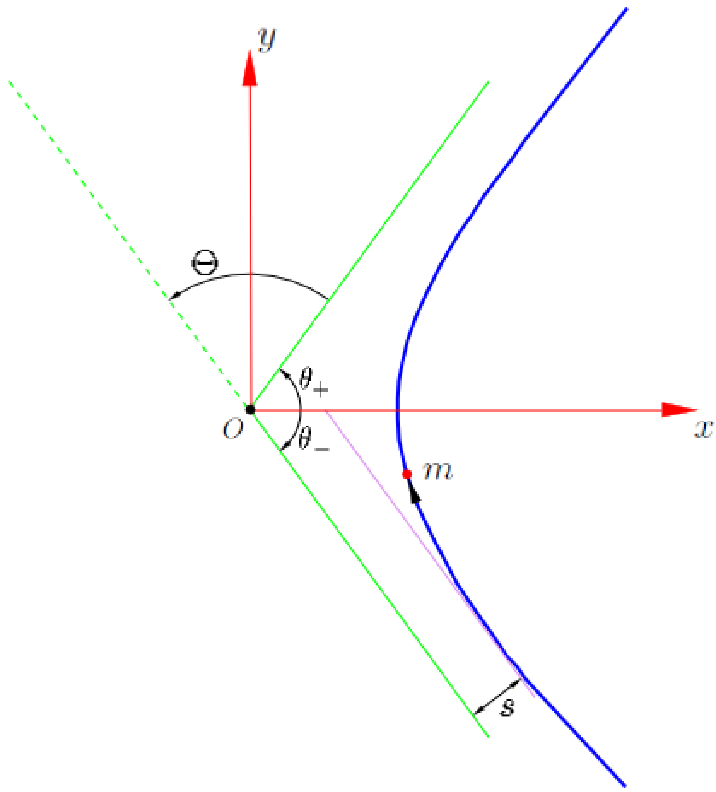
No entanto, por causa do centro de força repulsiva, a direção final é dada por

$$\theta = \theta_+ = \arccos\left(\frac{1}{e}\right).$$

A magnitude da deflexão é dada pelo chamado ângulo de deflexão Θ, que nada mais é do que o valor absoluto da variação angular da trajetória final da partícula devida à ação repulsiva do centro de força:

$$\Theta = \pi-2\arccos\left(\frac{1}{e}\right).$$

A figura abaixo ilustra esses ângulos.



Essa fórmula é equivalente a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{e}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2L^2E}{mK^2}}},$$

isto é,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2L^2E}{mK^2}}}.$$

A energia total inicial é dada pela energia cinética inicial, já que a partícula vem do infinito e, portanto, lá, só temos energia cinética:

$$E = \frac{1}{2}m\left|\dot{\mathbf{r}}_0\right|^2+\frac{K}{r_0}\approx\frac{1}{2}mv_0^2,$$

onde

$$v_0 = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right|,$$

para simplificar a notação. O momentum angular inicial é dado por

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0=m\left|\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_0\right|\hat{\mathbf{z}}=m\left|\mathbf{r}_0\right|v_0\operatorname{sen}\beta\hat{\mathbf{z}},$$

onde β é o ângulo entre os vetores posição e velocidade iniciais. O parâmetro de impacto, s, é definido como

$$s = |\mathbf{r}_0| \operatorname{sen}\beta$$

e, portanto,

$$L = |\mathbf{L}| = msv_0.$$

A figura acima ilustra o parâmetro de impacto s. Com isso,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2L^2E}{mK^2}}} = \left(1+\frac{2L^2E}{mK^2}\right)^{-1/2} = \left(1+\frac{m^2s^2v_0^2mv_0^2}{mK^2}\right)^{-1/2},$$

isto é,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \left(1+\frac{m^2s^2v_0^4}{K^2}\right)^{-1/2}.$$

Em um experimento de espalhamento, a quantidade mensurável é a seção de choque diferencial. Seja dN o número de partículas que são espalhadas dentro de um intervalo do ângulo de deflexão entre Θ e $\Theta + d\Theta$, por unidade de tempo. Esse número deve ser proporcional à intensidade do feixe incidente, I, dada pelo número de partículas que chegam na região do espalhamento por unidade de área e por unidade de tempo, e deve ser proporcional a $d\Theta$. Em termos matemáticos, podemos escrever

$$dN \propto I d\Theta,$$

isto é,

$$\frac{dN}{d\Theta} \propto I.$$

A constante de proporcionalidade deve ter unidades de área por ângulo de deflexão. Logo, seja $d\sigma/d\Theta$ essa constante de proporcionalidade. Assim:

$$\frac{dN}{d\Theta} = I\frac{d\sigma}{d\Theta}.$$

Para cada ângulo de deflexão existe um valor do parâmetro de impacto, como podemos ver da expressão

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \left(1+\frac{m^2s^2v_0^4}{K^2}\right)^{-1/2}.$$

Logo, para uma pequena variação do ângulo de deflexão, $d\Theta$, corresponde uma variação do parâmetro de impacto, ds. Para calcular essa correspondência, vamos diferenciar ambos os membros da equação acima:

$$d\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\right] = d\left[\left(1+\frac{m^2s^2v_0^4}{K^2}\right)^{-1/2}\right],$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)d\Theta = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{m^2s^2v_0^4}{K^2}\right)^{-3/2}\frac{2m^2v_0^4}{K^2}sds,$$

ou seja,

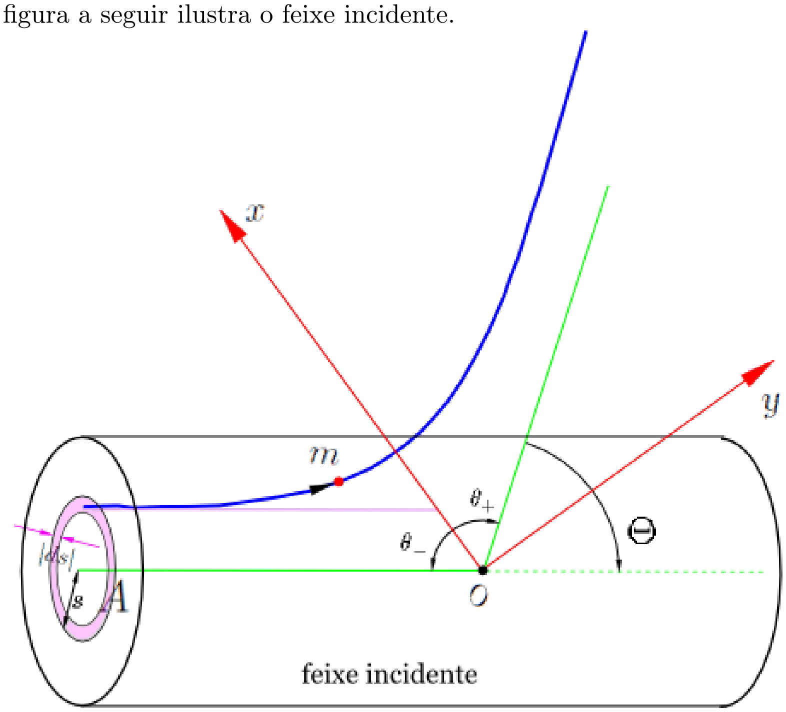
$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)d\Theta = -\text{sen}^3\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{2m^2v_0^4}{K^2}sds,$$

ou ainda,

$$d\Theta = -\text{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{2m^2v_0^4}{K^2}sds.$$

Note que o sinal de menos indica que $d\Theta < 0$ se $ds > 0$, como fica evidente da figura acima.

As partículas que serão espalhadas com ângulos de deflexão entre Θ e $\Theta + d\Theta$ devem ter parâmetros de impacto entre s e $s + ds$. Aqui, estarei considerando $d\Theta > 0$ e, assim, $ds < 0$. Consideremos a área transversal do feixe incidente, A. A figura a seguir ilustra o feixe incidente.



Então, IA é o número total de partículas que estão no feixe incidente e que chegam, por unidade de tempo, na região de espalhamento. Desse número, apenas aquelas partículas que tiverem parâmetro de impacto entre s e $s + ds$ serão espalhadas dentro do intervalo de ângulo de deflexão entre Θ e $\Theta + d\Theta$. Da área total, A, do feixe incidente, somente as partículas que passarem através da área $2\pi s\,|ds|$ do anel serão espalhadas com a deflexão que estamos considerando. Essa área está para a área total assim como o número de partículas espalhadas está para o número total incidente:

$$\frac{2\pi s\,|ds|}{A} = \frac{dN}{IA},$$

isto é,

$$\frac{dN}{I} = 2\pi s\,|ds|$$

como

$$\frac{dN}{d\Theta} = I\frac{d\sigma}{d\Theta},$$

segue que

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{dN}{Id\Theta} = 2\pi s\frac{|ds|}{d\Theta}.$$

Logo,

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)\frac{2m^2v_0^4}{K^2}}.$$

Mas,

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\mathrm{sen}^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\mathrm{sen}^3\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

e

$$\mathrm{sen}\Theta = 2\mathrm{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right),$$

isto é,

$$\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{\mathrm{sen}\Theta}{2\mathrm{sen}\left(\frac{\Theta}{2}\right)}.$$

Portanto,

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi\frac{K^2\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{2m^2v_0^4\mathrm{sen}^3\left(\frac{\Theta}{2}\right)} = 2\pi\frac{K^2\mathrm{sen}\Theta}{4m^2v_0^4\mathrm{sen}^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)},$$

isto é,

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = 2\pi\left(\frac{q_1q_2}{2mv_0^2}\right)^2\frac{\mathrm{sen}\Theta}{\mathrm{sen}^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}.$$