As leis de Kepler

Quando ministrei Física II, em 2010, fiz uma postagem em que discuti como Newton deve ter inferido, a partir das leis de Kepler, a lei de atração gravitacional inversamente proporcional ao quadrado da distância. Depois de inferida a lei universal da gravitação, Newton deduziu as três leis de Kepler. Como é que podemos fazer essa dedução hoje em dia? É isso que vou mostrar a seguir.

A primeira lei de Kepler diz que os planetas orbitam o Sol em torno de uma elipse, com o Sol em um dos focos. Na postagem sobre as trajetórias sob a ação de uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância, vimos que quando a energia total da partícula for negativa e a força for atrativa, então ela seguirá uma elipse com o centro de força em um dos seus focos. A trajetória obtida é assim:

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1-e\cos\theta},$$

onde

$$a\left(1-e^2\right) = -\frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

e

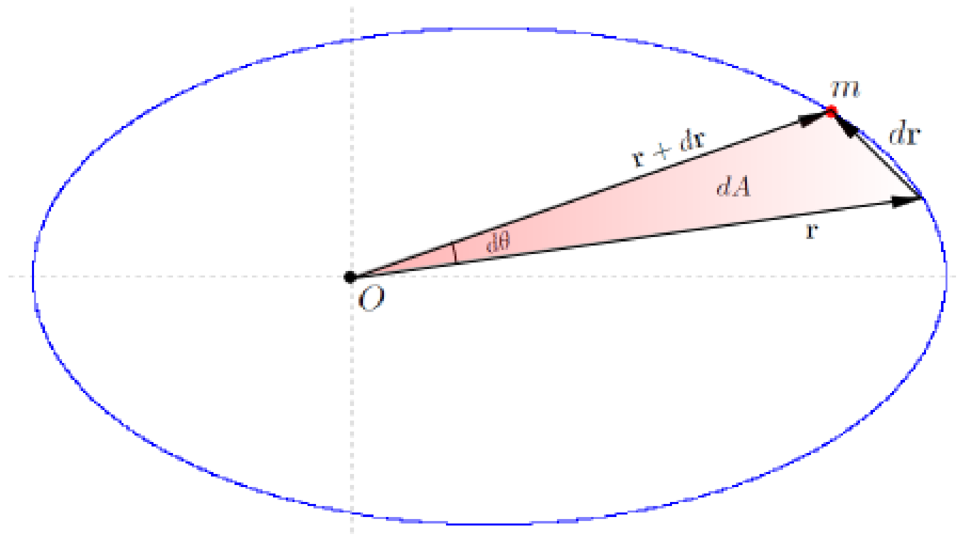
$$e = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}},$$

com

$$K = -GMm$$

e M é a massa da partícula na origem. Essa solução é uma elipse com a origem em um de seus focos.

A segunda lei de Kepler diz que o raio vetor que liga o Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Essa propriedade decorre da conservação do momentum angular. Veja, na figura abaixo, um elemento de área varrida pelo raio vetor da partícula ao longo de sua órbita elíptica.



O elemento de área dA pode ser escrito assim:

$$dA = \frac{1}{2}r\,|d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

Logo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r\,|d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Mas, porque o momentum angular é conservado, segue que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{L}{mr^2} = \frac{L}{2m},$$

isto é,

$$dA = \frac{L}{2m}dt$$

e, assim,

$$\Delta A = \frac{L}{2m}\Delta t.$$

Essa expressão nos diz que, para intervalos de tempo Δt_1 e Δt_2, para regiões diferentes da trajetória, teremos as áreas

$$\Delta A_1 = \frac{L}{2m}\Delta t_1$$

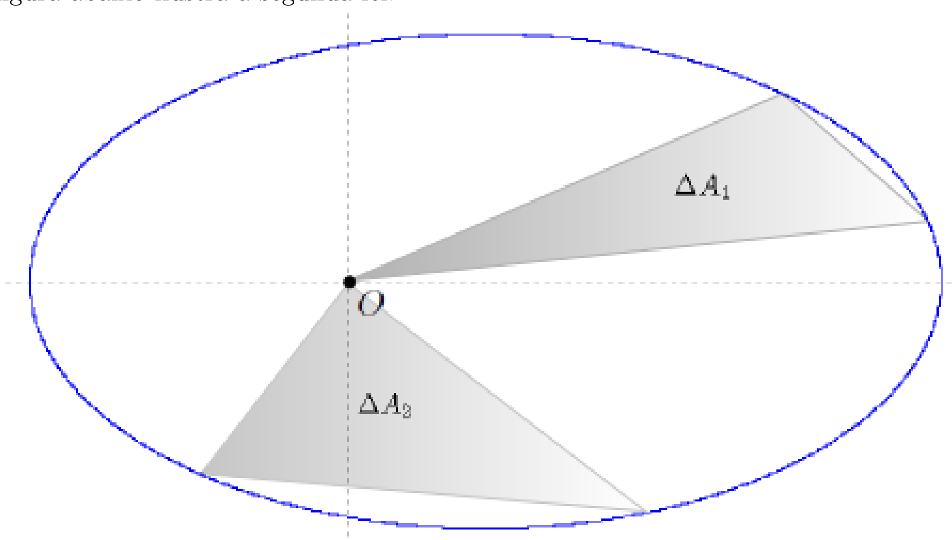
e

$$\Delta A_2 = \frac{L}{2m}\Delta t_2.$$

Se os intervalos forem iguais, isto é, se $\Delta t_1 = \Delta t_2$, as áreas também serão:

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 1.$$

A figura abaixo ilustra a segunda lei.



A terceira lei de Kepler diz que o quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita elíptica. Para ver isso, você só precisa saber que integrando a área varrida pelo raio vetor da partícula em uma volta completa vai dar um valor proporcional ao período, pois, de acordo com a equação

$$dA = \frac{L}{2m}dt,$$

segue que

$$A = \frac{L}{2m}T,$$

onde T é o período e A é a área interna a uma elipse:

$$A = \pi ab,$$

com a sendo o semi-eixo maior e b, o semi-eixo menor. Então,

$$T = \frac{2m}{L}\pi ab.$$

Já mostrei que, para uma elipse,

$$b = a\sqrt{1-e^2}.$$

Então,

$$b = a\sqrt{-\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}.$$

Assim,

$$T = \frac{2m}{L}\pi a^2\sqrt{-\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}},$$

que, elevado ao quadrado, dá

$$T^2 = -\frac{4m^2}{L^2}\pi^2 a^4 \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3} = -\frac{8\pi^2a^4}{G^2M^2m}E.$$

Mas,

$$a\left(1-e^2\right) = \frac{L^2}{GMm^2}$$

e

$$e = \sqrt{1+\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}.$$

Dessas duas equações, segue que

$$a\left(-\frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}\right) = \frac{L^2}{GMm^2},$$

isto é,

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

Logo,

$$T^2 = -\frac{8\pi^2a^4}{G^2M^2m}E = \frac{8\pi^2a^4}{G^2M^2m}\frac{GMm}{2a},$$

isto é,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3,$$

que é a terceira lei de Kepler.