Movimento de um projétil

A equação de movimento para um projétil é muito simples quando desprezamos a resistência do ar, ventos, efeitos da pressão atmosférica com a altitude, forma do projétil, etc. Usando a segunda lei de Newton, basta igualarmos a força peso do projétil de massa m à variação de momentum, assim:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -mg\hat{\mathbf{z}},$$

onde estou supondo proximidade com o solo, considerado plano, onde a aceleração da gravidade pode ser aproximada pela constante $g > 0$ e estou escolhendo o sistema de coordenadas com o eixo z apontando para cima. Supondo que o projétil não perde massa ao longo de sua trajetória, podemos escrever

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\hat{\mathbf{z}},$$

isto é,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\hat{\mathbf{z}}.$$

Tomando como conhecida a velocidade inicial, $\mathbf{v}_0$, podemos integrar ambos os membros dessa equação e obter

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 - gt\hat{\mathbf{z}}.$$

Conhecendo a posição inicial, $\mathbf{r}_0$, podemos integrar ambos os membros dessa equação também e obter a equação de movimento para o vetor posição do projétil:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{z}}.$$

Fácil, não é mesmo? Bico! :wink:

Como um exemplo, vamos lançar o projétil da origem, de modo que

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0},$$

e vamos impor uma velocidade inicial dada no plano xz :

$$\mathbf{v}_0 = \hat{\mathbf{x}}v_{0x} + \hat{\mathbf{z}}v_{0z},$$

onde $v_{0x} > 0$ e $v_{0z} > 0$. Com essas condições iniciais, podemos escrever o vetor posição do projétil como

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}v_{0x}t + \hat{\mathbf{z}}\left(v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right).$$

Em coordenadas cartesianas, as componentes do vetor posição do projétil ficam

$$x = v_{0x}t,$$

$$y = 0$$

e

$$z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Logo, o movimento, neste caso particular, dar-se-á no plano xz e a equação da trajetória pode ser obtida substituindo

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

na equação para a coordenada z. Assim, obtemos

$$z = v_{0z}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2,$$

isto é,

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2,$$

que é a equação de uma parábola, com concavidade voltada para baixo, já que

$$\frac{g}{2v_{0x}^2} > 0$$

por hipótese.

O projétil sai de $z = 0$ e volta a $z = 0$ quando

$$\frac{v_{0z}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 = 0,$$

isto é,

$$x = \frac{2v_{0z}v_{0x}}{g},$$

que é o alcance do projétil. A altura máxima é atingida quando

$$\frac{dz}{dx} = 0,$$

isto é, para o valor de x tal que

$$\frac{v_{0z}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x = 0,$$

ou seja,

$$x = \frac{v_{0z}v_{0x}}{g},$$

que é o ponto exatamente a meio alcance. A altura máxima é obtida substituindo esse valor de x na expressão de z :

$$z_{máx} = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\left(\frac{v_{0z}v_{0x}}{g}\right) - \frac{g}{2v_{0x}^2}\left(\frac{v_{0z}v_{0x}}{g}\right)^2,$$

isto é,

$$z_{máx} = \frac{v_{0z}^2}{g} - \frac{v_{0z}^2}{2g},$$

ou seja,

$$z_{máx} = \frac{v_{0z}^2}{2g}.$$

Resistência do ar

O que acontece se houver resistência do ar? Uma maneira simples de incluir, fenomenologicamente, um termo de resistência do ar na equação de movimento é supor a existência de uma força que só apareça se o projétil estiver com velocidade relativa ao ar não nula. Uma força desse tipo, bem simples, é dada por

$$\mathbf{F}_{res} = -b\frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

onde $b > 0$ é uma constante e o sinal negativo implica que a força se opõe ao movimento do projétil, já que é uma resistência. Pela segunda lei de Newton, a força resultante é igual à variação do momentum do projétil e, nesse caso, a resultante de forças é a soma do peso do projétil com a resistência do ar. Logo, a equação de movimento escreve-se

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -mg\hat{\mathbf{z}} - b\frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

isto é,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\hat{\mathbf{z}} - \frac{b}{m}\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Como é que resolvemos essa equação? Não é difícil. Quer ver? Veja que também podemos escrever a equação acima assim:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -g\hat{\mathbf{z}}$$

e, portanto, como b/m não depende de t,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{b}{m}\mathbf{r}\right) \quad = \quad -g\hat{\mathbf{z}}.$$

Se integrarmos ambos os membros dessa equação, desde $t = 0$ até um valor posterior qualquer $t > 0$, obtemos

$$\int_0^t ds\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}+\frac{b}{m}\mathbf{r}(s)\right) \quad = \quad -\int_0^t dsg\hat{\mathbf{z}},$$

onde mudei a variável de integração para s para não confundi-la com o limite superior que estou denotando por t. Assim, como a integral da derivada é fácil de fazer, essa equação dá

$$\left.\left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}+\frac{b}{m}\mathbf{r}(s)\right)\right|_0^t \quad = \quad -gt\hat{\mathbf{z}},$$

ou seja,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}+\frac{b}{m}\mathbf{r}(t)\right)-\left.\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right|_{s=0}-\frac{b}{m}\mathbf{r}(0) \quad = \quad -gt\hat{\mathbf{z}}.$$

Mas, como a velocidade é dada por

$$\mathbf{v}(t) \quad = \quad \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

segue que $\left.\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right|_{s=0}$ nada mais é do que a velocidade inicial do projétil:

$$\mathbf{v}(0) \quad = \quad \left.\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right|_{s=0}.$$

Para simplificar a notação, vou definir:

$$\mathbf{r}_0 \quad = \quad \mathbf{r}(0)$$

e

$$\mathbf{v}_0 \quad = \quad \mathbf{v}(0).$$

Sendo assim, a equação diferencial que ainda falta resolver fica

$$\left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}+\frac{b}{m}\mathbf{r}(t)\right) \quad = \quad -gt\hat{\mathbf{z}}+\left.\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right|_{s=0}+\frac{b}{m}\mathbf{r}(0),$$

isto é,

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\frac{b}{m}\mathbf{r}\right) \quad = \quad -gt\hat{\mathbf{z}}+\left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right),$$

onde, como sempre, escrevemos

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}\,(t)$$

para simplificar a notação.

Olhe agora para o que há entre parênteses no primeiro membro da equação diferencial acima:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{b}{m}\mathbf{r}.$$

Viu? Tem a derivada de $\mathbf{r}$ e tem b/m, que é uma constante, multiplicando $\mathbf{r}$. Isso não lhe lembra de uma exponencial sendo derivada? Por exemplo, quanto dá a derivada do produto

$$\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)?$$

Vamos calcular? Então, lá vai:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right] \;=\; \exp\left(\frac{b}{m}t\right)\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{d}{dt}\left[\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right],$$

não é mesmo? Mas, como

$$\frac{d}{dt}\left[\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right] \;=\; \frac{b}{m}\exp\left(\frac{b}{m}t\right),$$

segue que

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right] \;=\; \exp\left(\frac{b}{m}t\right)\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{b}{m}\exp\left(\frac{b}{m}t\right),$$

ou seja, colocando a exponencial em evidência, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right] \;=\; \exp\left(\frac{b}{m}t\right)\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{b}{m}\mathbf{r}\right).$$

Então, dividindo ambos os membros dessa equação pela exponencial, ficamos com

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{b}{m}\mathbf{r} \;=\; \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right].$$

Você se lembra que a equação que queremos resolver é assim:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{b}{m}\mathbf{r}\right) \;=\; -gt\hat{\mathbf{z}} + \left(\mathbf{v}_0 + \frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right),$$

não é mesmo? Então, agora podemos escrevê-la deste outro jeito:

$$\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right] \;=\; -gt\hat{\mathbf{z}} + \left(\mathbf{v}_0 + \frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right).$$

É, ou não é?

Tudo o que temos a fazer agora é mais uma integração simples. Quer ver? Multiplicando tudo pela exponencial $\exp\left(\frac{b}{m}t\right)$, dá

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right] = -\hat{\mathbf{z}}gt\exp\left(\frac{b}{m}t\right)+\left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right)\exp\left(\frac{b}{m}t\right).$$

Fazendo a integral de ambos os membros dessa equação, desde $t = 0$ até um tempo posterior qualquer, $t > 0$, obtemos

$$\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)-\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right]_{t=0} = -\hat{\mathbf{z}}g\int_0^t s\exp\left(\frac{b}{m}s\right)ds+\left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right)\int_0^t\exp\left(\frac{b}{m}s\right)ds.$$

Agora, a integral da exponencial é fácil:

$$\int_0^t \exp\left(\frac{b}{m}s\right)ds = \frac{m}{b}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)-\frac{m}{b}.$$

Resta fazermos a integral

$$\int_0^t s\exp\left(\frac{b}{m}s\right)ds,$$

que parece ser mais complicada. Tem outro truque que dá para usarmos aqui e que vai ser muitíssimo útil na sua vida acadêmica futura. Considere a seguinte integral:

$$\int_0^t \exp(\alpha s)\,ds = \frac{1}{\alpha}\exp(\alpha t)-\frac{1}{\alpha},$$

onde α é um parâmetro real. Faça a derivada parcial de ambos os membros dessa equação, com relação a α e veja o que dá:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^t \exp(\alpha s)\,ds = \int_0^t \frac{\partial\exp(\alpha s)}{\partial\alpha}ds=\int_0^t s\exp(\alpha s)\,ds$$

e

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\exp(\alpha t)-\frac{1}{\alpha}\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\exp(\alpha t)\right]-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\exp(\alpha t)-\frac{1}{\alpha}\right] = -\frac{1}{\alpha^2}\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}t\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha^2}.$$

Igualando esses dois membros, vem

$$\int_0^t s\exp(\alpha s)\,ds = -\frac{1}{\alpha^2}\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}t\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha^2}.$$

Duvida? Derive o segundo membro com relação a t e veja o que é que dá:

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{\alpha^2}\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}t\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha^2}\right] = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{d}{dt}\left[\exp(\alpha t)\right]+\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dt}\left[t\exp(\alpha t)\right],$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{\alpha^2}\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}t\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha^2}\right] = -\frac{1}{\alpha^2}\alpha\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}t\alpha\exp(\alpha t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{\alpha^2}\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha}t\exp(\alpha t)+\frac{1}{\alpha^2}\right] = t\exp(\alpha t),$$

que tem a mesma forma funcional do integrando do primeiro membro.

Juntando isso tudo na nossa solução acima, isto é,

$$\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)-\left[\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)\right]_{t=0} = -\hat{\mathbf{z}}g\int_0^t s\exp\left(\frac{b}{m}s\right)ds+\left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right)\int_0^t\exp\left(\frac{b}{m}s\right)ds,$$

finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)-\mathbf{r}_0 &= -\hat{\mathbf{z}}g\left[-\frac{m^2}{b^2}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)+\frac{m}{b}t\exp\left(\frac{b}{m}t\right)+\frac{m^2}{b^2}\right]\\ &+ \left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right)\left[\frac{m}{b}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)-\frac{m}{b}\right],\end{aligned}$$

onde já tomei

$$\alpha = \frac{b}{m}.$$

Veja que também podemos reescrever essa solução assim:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\exp\left(\frac{b}{m}t\right) &= \mathbf{r}_0-\hat{\mathbf{z}}g\left[-\frac{m^2}{b^2}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)+\frac{m}{b}t\exp\left(\frac{b}{m}t\right)+\frac{m^2}{b^2}\right]\\ &+ \left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right)\left[\frac{m}{b}\exp\left(\frac{b}{m}t\right)-\frac{m}{b}\right],\end{aligned}$$

Dividindo tudo por $\exp\left(\frac{b}{m}t\right)$, vem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)-\hat{\mathbf{z}}g\left[-\frac{m^2}{b^2}+\frac{m}{b}t+\frac{m^2}{b^2}\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]+\left(\mathbf{v}_0+\frac{b}{m}\mathbf{r}_0\right)\left[\frac{m}{b}-\frac{m}{b}\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right],$$

isto é,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0+\left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m^2}{b^2}g+\frac{m}{b}\mathbf{v}_0\right)\left[1-\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]-\hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt.$$

Como um exemplo, vamos lançar o projétil da origem, de modo que

$$\mathbf{r}_0 \quad = \quad \mathbf{0},$$

e vamos impor uma velocidade inicial dada no plano xz :

$$\mathbf{v}_0 \quad = \quad \hat{\mathbf{x}} v_{0x} + \hat{\mathbf{z}} v_{0z},$$

onde $v_{0x} > 0$ e $v_{0z} > 0$, exatamente como fizemos acima, no caso sem resistência do ar. Com essas condições iniciais, podemos escrever o vetor posição do projétil como

$$\mathbf{r} \quad = \quad \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m^2}{b^2}g + \hat{\mathbf{x}}\frac{m}{b}v_{0x} + \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}v_{0z}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] - \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt,$$

isto é,

$$\mathbf{r} \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}\frac{m}{b}v_{0x}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] + \hat{\mathbf{z}}\left\{\left(\frac{m^2}{b^2}g + \frac{m}{b}v_{0z}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] - \frac{m}{b}gt\right\}.$$

Em coordenadas cartesianas, as componentes do vetor posição do projétil ficam

$$x \quad = \quad \frac{m}{b}v_{0x}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right],$$

$$y \quad = \quad 0$$

e

$$z \quad = \quad \left(\frac{m^2}{b^2}g + \frac{m}{b}v_{0z}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] - \frac{m}{b}gt.$$

Aqui também o movimento se dá no plano xz, mas a equação da trajetória é mais complicada. Primeiro fazemos a substituição de

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] \quad = \quad \frac{xb}{mv_{0x}}$$

na expressão de z, obtendo

$$z \quad = \quad \left(\frac{m^2}{b^2}g + \frac{m}{b}v_{0z}\right)\frac{xb}{mv_{0x}} - \frac{m}{b}gt,$$

isto é,

$$z \quad = \quad \left(\frac{mg}{bv_{0x}} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right)x - \frac{m}{b}gt.$$

Depois disso, utilizamos

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] \quad = \quad \frac{xb}{mv_{0x}}$$

para isolar t, assim:

$$\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) \quad = \quad 1 - \frac{xb}{mv_{0x}},$$

isto é,

$$\ln\left[\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] \quad = \quad \ln\left(1 - \frac{xb}{mv_{0x}}\right),$$

ou seja,

$$t \quad = \quad -\frac{m}{b}\ln\left(1 - \frac{xb}{mv_{0x}}\right),$$

ou ainda,

$$t \quad = \quad -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mv_{0x} - xb}{mv_{0x}}\right).$$

Então, a equação

$$t \quad = \quad \frac{m}{b}\ln\left(\frac{mv_{0x}}{mv_{0x} - bx}\right),$$

substituída na expressão para z dá

$$z \quad = \quad \left(\frac{mg}{bv_{0x}} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right)x - \frac{m^2 g}{b^2}\ln\left(\frac{mv_{0x}}{mv_{0x} - bx}\right),$$

que não é uma parábola!

Podemos recuperar o resultado anterior fazendo o limite em que b vai a zero? Sim, não só podemos, como devemos! Tomemos a solução geral:

$$\mathbf{r} \quad = \quad \mathbf{r}_0 + \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m^2}{b^2}g + \frac{m}{b}\mathbf{v}_0\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right] - \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt.$$

Note que se fizermos $b = 0$ nessa expressão encontraremos divergências porque b aparece nos denominadores. Temos que tomar cuidado para ver o caso em que não temos resistência do ar nessa equação. Portanto, vamos com calma! Quando b é muito pequeno, podemos expandir a exponencial em série de potências e obter

$$\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) \quad \approx \quad 1 - \frac{b}{m}t + \frac{b^2}{2m^2}t^2 - \frac{b^3}{6m^3}t^3$$

Logo,

$$\mathbf{r} \quad \approx \quad \mathbf{r}_0 + \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m^2}{b^2}g + \frac{m}{b}\mathbf{v}_0\right)\left(1 - 1 + \frac{b}{m}t - \frac{b^2}{2m^2}t^2 + \frac{b^3}{6m^3}t^3\right) - \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt,$$

isto é,

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m^2}{b^2}g + \frac{m}{b}\mathbf{v}_0\right)\frac{b}{m}t\left(1 - \frac{b}{2m}t + \frac{b^2}{6m^2}t^2\right) - \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt,$$

ou seja,

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt + \mathbf{v}_0 t\right)\left(1 - \frac{b}{2m}t + \frac{b^2}{6m^2}t^2\right) - \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt,$$

ou ainda,

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt + \mathbf{v}_0 t + \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt + \mathbf{v}_0 t\right)\left(-\frac{b}{2m}t + \frac{b^2}{6m^2}t^2\right) - \hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt.$$

Assim,

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt + \mathbf{v}_0 t\right)\left(-\frac{b}{2m}t + \frac{b^2}{6m^2}t^2\right),$$

que pode ser simplificado ainda mais:

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{b}{2m}t\left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt + \mathbf{v}_0 t\right) + \frac{b^2}{6m^2}t^2\left(\hat{\mathbf{z}}\frac{m}{b}gt + \mathbf{v}_0 t\right),$$

isto é,

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{2}gt^2 - \mathbf{v}_0\frac{b}{2m}t^2 + \hat{\mathbf{z}}\frac{gb}{6m}t^3 + \mathbf{v}_0\frac{b^2}{6m^2}t^3.$$

No limite em que b vai a zero, essa equação torna-se

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{z}},$$

que é a mesma solução do caso sem resistência do ar!