A trajetória sob a ação de uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância

A força gravitacional e a força eletrostática são centrais e proporcionais ao inverso do quadrado da distância ao centro de força, que vou tomar como a origem do sistema de coordenadas. Podemos escrever esse tipo de força central assim:

$$\mathbf{F} = \frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

onde K é uma constante que pode ser positiva, no caso de força repulsiva, ou negativa, no caso de força atrativa. Uma energia potencial adequada para essa força central pode ser escrita como

$$V(r) = \frac{K}{r},$$

pois

$$-\boldsymbol{\nabla} V(r) = \frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{F}.$$

De acordo com a postagem sobre força central, a energia total pode ser expressa assim:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

e, com a expressão acima para a energia potencial, assim:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}.$$

Como o caso de $L = 0$ significa que a partícula tem velocidade ao longo da direção radial, o movimento é linear e não vou considerar esse caso mais simples aqui. Sempre estarei supondo $L \neq 0$.

Veja que essa energia total pode ser positiva ou negativa, dependendo do valor de K e das condições iniciais. Se a força é repulsiva, por exemplo, então K é uma constante positiva e a energia total também é positiva, pois todos os três termos na expressão de E são positivos. Quando a força é atrativa, a constante K é negativa e há condições iniciais que fazem com que a energia total seja negativa; por exemplo, basta tomar a velocidade radial inicial nula e r suficientemente grande para que o segundo termo da equação acima seja desprezível comparativamente ao valor absoluto do terceiro. Nesse caso de força atrativa, no entanto, há também condições iniciais que correspondem a uma energia total positiva; por exemplo, basta tomar uma velocidade radial suficientemente grande para que o primeiro e o segundo termos somados resultem em um valor maior do que o módulo do terceiro termo. Note, obviamente, que se a energia assume um determinado valor para uma dada condição inicial, então permanecerá sempre com esse mesmo valor durante todo o movimento, já que a energia total é conservada.

Sabemos que quando lançamos um objeto para cima, usualmente ele atinge uma altura máxima e retorna. Também sabemos que isso pode ser conseguido com projéteis e foguetes: atingem altitudes máximas e retornam. Em órbita da Terra, um satélite atinge uma distância mínima, chamada perigeu, e uma distância máxima, chamada apogeu. Um planeta também, em sua órbita em torno do Sol, atinge uma distância mínima, chamada periélio, e uma distância máxima, chamada afélio. Nesses pontos de distâncias extremas, a velocidade radial do objeto em órbita se anula. Vamos procurar por essas distâncias? Para isso, façamos $\dot{r} = 0$ na equação que dá a energia. Então,

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}.$$

Para simplificar, seja

$$u = \frac{1}{r}.$$

então,

$$E = \frac{L^2}{2m}u^2 + Ku.$$

Rearranjando, temos

$$u^2 + \frac{2mK}{L^2}u - \frac{2mE}{L^2} = 0,$$

cujas soluções são:

$$u_+ = -\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

e

$$u_- = -\frac{mK}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}.$$

Note que só pode haver soluções reais e, portanto, fisicamente aceitáveis, se

$$\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} \geqslant 0,$$

isto é,

$$E \geqslant -\frac{mK^2}{2L^2}.$$

Daqui em diante estarei sempre supondo a validade dessa desigualdade.

Quando a energia é positiva, a solução u_- é negativa, o que não é possível fisicamente, pois u_- é o inverso de uma distância, que é necessariamente positiva ou nula. Então, não há mais do que um só ponto da órbita em que a velocidade radial é nula e esse ponto é dado por

$$r_0 = \frac{1}{u_+} = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}}.$$

Note que quando a energia é positiva, não há solução positiva para u_- mesmo quando $K < 0$. Assim, para energias positivas não há duas posições em que a velocidade radial se anule. Nessas circunstâncias, a partícula atinge uma certa distância da origem e retorna, mas não volta mais. Essas trajetórias não são fechadas e, portanto, não são periódicas.

Para termos dois pontos de velocidades radiais nulas, a energia deve ser negativa e, portanto, a força deve ser atrativa, isto é, $K < 0$, conforme explicado acima. Nesse caso, temos uma distância máxima e uma mínima, dadas, respectivamente, por

$$r_> = \frac{1}{u_-} = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}}$$

e

$$r_< = \frac{1}{u_+} = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}}.$$

Na postagem sobre força central mostrei que a equação da trajetória de uma partícula sob a ação de uma força central do tipo

$$\mathbf{F} = \frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

é dada por

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{mK}{L^2},$$

onde

$$u = \frac{1}{r}.$$

Para resolver esse problema, podemos mudar de variável:

$$w = u + \frac{mK}{L^2}.$$

Com isso,

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} = \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{mK}{L^2} = -w,$$

isto é,

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} = -w.$$

Essa é a equação para o movimento de um oscilador harmônico simples, cuja solução geral pode ser escrita assim:

$$w = A\cos(\theta+\gamma),$$

onde A e γ são constantes que devem ser determinadas em termos das condições iniciais. Retornando à variável u, obtemos

$$u = -\frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta+\gamma).$$

Retornando, agora, para a variável r, dá

$$\frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta+\gamma).$$

Vamos derivar ambos os membros dessa equação com relação ao tempo, implicitamente:

$$-\frac{1}{r^2}\dot{r} = -A\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,(\theta+\gamma).$$

Como vimos na postagem sobre força central,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{r^2}\dot{r} = A\frac{L}{mr^2}\mathrm{sen}\,(\theta+\gamma),$$

isto é,

$$\dot{r} = A\frac{L}{m}\mathrm{sen}\,(\theta+\gamma).$$

Como a energia total é dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r},$$

segue que

$$E = \frac{1}{2}mA^2\frac{L^2}{m^2}\mathrm{sen}^2\,(\theta+\gamma) + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r},$$

isto é,

$$E = A^2\frac{L^2}{2m}\mathrm{sen}^2\,(\theta+\gamma) + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}.$$

Mas já sabemos que

$$\frac{1}{r} = -\frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta+\gamma)\,.$$

Logo,

$$E = A^2\frac{L^2}{2m}\mathrm{sen}^2(\theta+\gamma) + \frac{L^2}{2m}\left[-\frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta+\gamma)\right]^2 + K\left[-\frac{mK}{L^2} + A\cos(\theta+\gamma)\right],$$

isto é,

$$E = A^2\frac{L^2}{2m}\mathrm{sen}^2(\theta+\gamma) + \frac{mK^2}{2L^2} - KA\cos(\theta+\gamma) + \frac{L^2}{2m}A^2\cos^2(\theta+\gamma) - \frac{mK^2}{L^2} + AK\cos(\theta+\gamma)\,,$$

ou seja,

$$E = \frac{L^2}{2m}A^2 - \frac{mK^2}{2L^2},$$

ou ainda,

$$A^2 = \frac{2m}{L^2}\left(E + \frac{mK^2}{2L^2}\right).$$

Logo,

$$|A| = \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}.$$

Sem perder a generalidade, podemos tomar $A > 0$, já que basta escolher $\gamma + \pi$ como constante arbitrária no lugar de γ para mudar o sinal do termo que tem $\cos(\theta+\gamma)$, isto é,

$$\cos(\theta+\gamma+\pi) = -\cos(\theta+\gamma)\,.$$

Com essa escolha, podemos escrever a equação da órbita como

$$r = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}\cos(\theta+\gamma)}.$$

Caso em que a força é atrativa e $E < 0$

Neste caso, já vimos que temos duas posições radiais com velocidades radiais nulas:

$$r_> = \frac{1}{u_-} = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}}$$

e

$$r_{<} \;=\; \frac{1}{u_{+}} = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}}.$$

Esses são os valores obtidos a partir da equação da trajetória,

$$r \;=\; \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}\cos\left(\theta+\gamma\right)},$$

quando $\theta + \gamma = \pi$ e $\theta + \gamma = 0$, respectivamente. Então, veja que podemos reescrever essa solução para a trajetória da seguinte forma:

$$r \;=\; \frac{-\frac{L^2}{mK}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}}\cos\left(\theta+\gamma\right)}.$$

Sejam

$$e \;=\; \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}}$$

e

$$a \;=\; \frac{|K|}{2\,|E|},$$

que, como estamos tratando o caso em que K e E são constantes negativas, a também pode ser escrita como

$$a \;=\; \frac{K}{2E}.$$

Veja também que, como $E < 0$, segue que $e < 1$; não se esqueça que estamos sempre supondo que

$$E \;\geqslant\; -\frac{mK^2}{2L^2}.$$

Com essas definições, veja que

$$a\left(1-e^2\right) \;=\; \frac{K}{2E}\left(1 - 1 - \frac{2L^2E}{mK^2}\right) = -\frac{L^2}{mK}$$

e, portanto, a equação da trajetória pode ser expressa como

$$r \;=\; \frac{a\left(1-e^2\right)}{1 + e\cos\left(\theta+\gamma\right)},$$

que é a equação de uma elipse em coordenadas polares. Sempre podemos escolher o eixo x tal que $\gamma = \pi$ e, portanto,

$$r \;=\; \frac{a\left(1-e^2\right)}{1 - e\cos\theta}.$$

Note que a constante γ é arbitrária e deve ser determinada pela condição inicial do problema, isto é, alguém deve fornecer o valor da posição da partícula em $t = 0$. Não importa qual seja essa posição inicial em um particular sistema de coordenadas, sempre podemos escolher um novo sistema de coordenadas, para a mesma trajetória, tal que γ assuma o valor que quisermos nesse novo sistema. Então, para fazer com que a equação da elipse que obtivemos seja escrita como a da postagem A elipse, aqui estamos supondo escolher um eixo x tal que, para essa escolha, $\gamma = \pi$.

Quando a força é atrativa e $E > 0$

Neste caso, a condição

$$E \geqslant -\frac{mK^2}{2L^2}$$

é automaticamente satisfeita e a solução que obtivemos acima para a trajetória, isto é,

$$r = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \cos\left(\theta + \gamma\right)},$$

pode ser reescrita assim:

$$r = \frac{-\frac{L^2}{mK}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}} \cos\left(\theta + \gamma\right)}.$$

Usando as mesmas definições acima, isto é,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}}$$

e

$$a = \frac{|K|}{2\,|E|},$$

segue que

$$a\left(e^2 - 1\right) = \frac{|K|}{2\,|E|}\left(1 + \frac{2L^2E}{mK^2} - 1\right) = -\frac{K}{2E}\frac{2L^2E}{mK^2} = -\frac{L^2}{mK}$$

e, portanto,

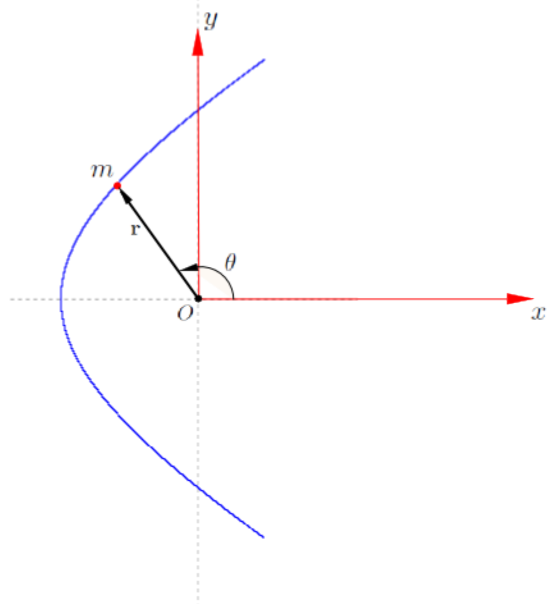
$$r = \frac{a\left(e^2 - 1\right)}{1 + e\cos\left(\theta + \gamma\right)}.$$

Note que agora $e > 1$, pois $E > 0$. Por causa disso, veja que $\theta + \gamma = \pi$ não pode fazer parte da trajetória, pois isso implicaria uma distância r negativa. No entanto, $\theta+\gamma=0$ faz parte da trajetória e dá o ponto da órbita mais próximo da origem. É quando a partícula, vindo de longe, “passa por trás da origem” e, defletindo sua direção original, afasta-se da origem seguindo em outra direção.

Aqui também, se escolhermos o eixo x adequadamente, podemos tomar $\gamma=\pi$ e escrever

$$r = \frac{a\left(e^2-1\right)}{1-e\cos\theta}.$$

Essa é a equação de uma hipérbole em coordenadas polares. A figura a seguir ilustra um trecho dessa trajetória.



Caso em que a força é atrativa e a energia total é nula

Neste caso,

$$r = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2}+\sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2}\cos\left(\theta+\gamma\right)},$$

isto é,

$$r = \frac{-\frac{L^2}{mK}}{1-\cos\theta},$$

já escolhendo o eixo x de modo a termos $\gamma=\pi$. Esse é o caso em que a trajetória é uma parábola. Veja que a partícula, porque a força é atrativa, “passa por trás” do centro de atração. Para ver que essa trajetória é a de uma parábola, basta escrevê-la em coordenadas cartesianas de novo, para um sistema de coordenadas com zero coincidente com com o ponto em que $r=0$. Então, na equação acima, fazemos:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

e

$$\cos\theta = \frac{x}{r}.$$

O resultado fica:

$$r = \frac{-\frac{L^2}{mK}}{1-\frac{x}{r}},$$

isto é, dividindo ambos os membros dessa equação por r, dá:

$$1 = \frac{-\frac{L^2}{mK}}{r-x},$$

ou seja,

$$r = x - \frac{L^2}{mK},$$

ou ainda,

$$\sqrt{x^2+y^2} = x - \frac{L^2}{mK}.$$

Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado, vem:

$$x^2+y^2 = x^2 - 2\frac{L^2}{mK}x + \left(\frac{L^2}{mK}\right)^2,$$

isto é,

$$2\frac{L^2}{mK}x = -y^2 + \left(\frac{L^2}{mK}\right)^2,$$

ou seja,

$$x = -\frac{mK}{2L^2}y^2 + \frac{L^2}{2mK},$$

que é a equação de uma parábola no plano xy. Veja que, como K é uma constante negativa, essa parábola corta o eixo x em $L^2/(2mK)$ e corta o eixo y em $\pm L^2/(mK)$. A figura para essa parábola é qualitativamente muito similar à do caso anterior.

Caso em que a força é repulsiva

Neste caso, $K > 0$ e a energia total é necessariamente positiva. A equação da trajetória continua sendo escrita como acima, isto é,

$$r = \frac{1}{-\frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \cos\left(\theta + \gamma\right)},$$

isto é,

$$r = \frac{\frac{L^2}{mK}}{-1 + \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}} \cos\left(\theta + \gamma\right)},$$

Usando as definições anteriores para a excentricidade,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}} > 1,$$

e para o parâmetro a,

$$a = \frac{|K|}{2|E|},$$

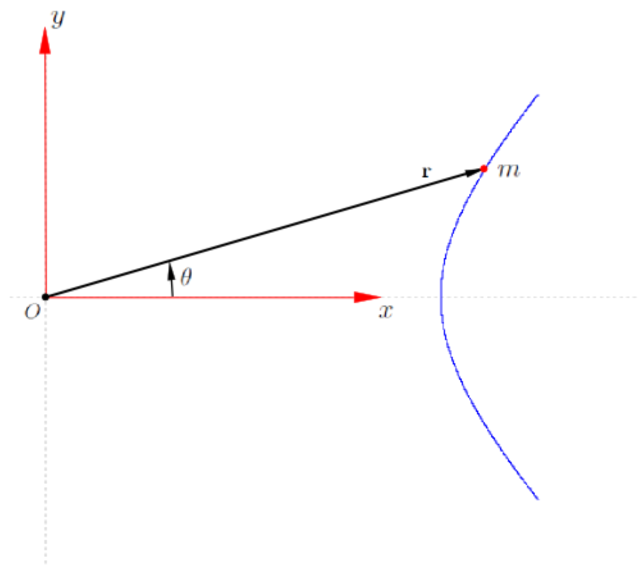
segue que

$$a\left(e^2 - 1\right) = \frac{|K|}{2|E|}\left(1 + \frac{2L^2E}{mK^2} - 1\right) = \frac{K}{2E}\frac{2L^2E}{mK^2} = \frac{L^2}{mK}$$

e, portanto,

$$r = \frac{a\left(e^2 - 1\right)}{-1 + e\cos\theta},$$

onde aqui já estou supondo que tomamos o eixo x de tal forma que $\gamma = 0$, desta vez. Essa equação também descreve uma hipérbole em coordenadas polares, mas note que agora o ponto em que $\theta = 0$ pertence à trajetória, já que $e > 1$. Já o ponto $\theta = \pi$ não pertence a essa hipérbole. Nessa trajetória, a partícula é desviada de sua trajetória antes da origem, isto é, "não passa por trás" do centro de força. A figura a seguir ilustra um trecho dessa trajetória.


y
r
m
θ
O
x