Força central

A força eletrostática e a força gravitacional são centrais. Isso quer dizer que quando duas partículas interagem eletrostatica ou gravitacionalmente, a força que uma exerce sobre a outra tem a direção da linha que as liga e só depende da distância entre elas. É um fato decorrente da terceira lei de Newton que a força que a primeira exerce sobre a segunda tem módulo igual e sentido contrário ao da força que a segunda exerce sobre a primeira. Tipicamente, ambas as partículas interagindo sob a ação de uma força central movem-se com acelerações inversamente proporcionais às suas respectivas massas. Aqui, para simplificar a conversa, vou supor que uma das partículas não sofra aceleração apreciável porque tem uma massa muito superior à massa da outra partícula, mesmo que a força que age sobre ela seja igual, em módulo, à força que age sobre a outra. Então, desprezando a aceleração da partícula de massa praticamente infinita, supondo que essa partícula permaneça em repouso na origem do sistema de coordenadas, vou escrever a força sobre a outra partícula, de massa m finita, da seguinte forma:

$$\mathbf{F} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}},$$

onde r é o módulo do vetor posição dessa partícula e $\hat{\mathbf{r}}$ é o versor na direção radial. Em termos de coordenadas cartesianas, escrevemos

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x}{r}\hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{r}\hat{\mathbf{y}} + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{z}}.$$

A primeira observação para o movimento sob força central é que a trajetória da partícula móvel é uma curva plana. Para ver isso, basta calcular o torque com relação à origem:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times [F(r)\,\hat{\mathbf{r}}] = F(r)\,(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0},$$

pois

$$\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = r\,(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}.$$

Como

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} = \mathbf{0},$$

segue que o momentum angular, $\mathbf{L}$, é uma constante de movimento. Logo,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}_0,$$

onde $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{p}_0$ são, respectivamente, o vetor posição e o momentum iniciais da partícula. Escrevendo

$$\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0,$$

onde $\mathbf{v}_0$ é a velocidade inicial da partícula, também podemos escrever

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0.$$

Para deixar as coisas ainda mais concretas, vou tomar o eixo x do sistema de coordenadas ao longo do vetor $\mathbf{r}_0$ e escolher o eixo z perpendicular ao vetor $\mathbf{v}_0$. Com isso, é óbvio agora que

$$\mathbf{L} = m\left|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0\right|\hat{\mathbf{z}} = L\hat{\mathbf{z}},$$

onde

$$L = m\left|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0\right|$$

é independente do tempo. Para um instante qualquer, diferente do instante inicial, podemos escrever

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = L\hat{\mathbf{z}}$$

e, como $m \neq 0$, podemos escrever

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}}.$$

Caso $L = 0$, segue que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{r}$ é paralelo ou anti-paralelo a $\mathbf{v}$ a todo instante, resultando em um movimento linear.

Consideremos agora o caso em que $L \neq 0$. Em termos de componentes cartesianas, podemos escrever

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) \times \left(\frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{z}}\right),$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \times \mathbf{v} &= (x\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}})\frac{dx}{dt} \\
&+ (x\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} + y\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}})\frac{dy}{dt} \\
&+ (x\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} + y\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} + z\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}})\frac{dz}{dt}.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} &= -\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{z}},\\ \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} &= -\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

e

$$\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{y}}.$$

Com isso, podemos escrever

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \left(-y\hat{\mathbf{z}}+z\hat{\mathbf{y}}\right)\frac{dx}{dt}+\left(x\hat{\mathbf{z}}-z\hat{\mathbf{x}}\right)\frac{dy}{dt}+\left(-x\hat{\mathbf{y}}+y\hat{\mathbf{x}}\right)\frac{dz}{dt},$$

isto é,

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = -y\frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{z}}+z\frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{y}}+x\frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{z}}-z\frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{x}}-x\frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{y}}+y\frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{x}},$$

ou seja,

$$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = \left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\hat{\mathbf{x}}+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\hat{\mathbf{y}}+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\hat{\mathbf{z}}=\frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt} &= 0,\\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt} &= 0\end{aligned}$$

e

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt} = \frac{L}{m}.$$

Vamos multiplicar a equação

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt} = 0$$

por x e a equação

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt} = 0,$$

por y. Obtemos:

$$xy\frac{dz}{dt}-xz\frac{dy}{dt} = 0$$

e

$$yz\frac{dx}{dt}-yx\frac{dz}{dt} = 0.$$

Somando membro a membro essas duas equações, dá

$$xy\frac{dz}{dt} - xz\frac{dy}{dt} + yz\frac{dx}{dt} - yx\frac{dz}{dt} = 0,$$

isto é,

$$-xz\frac{dy}{dt} + yz\frac{dx}{dt} = 0,$$

ou seja, colocando z em evidência e multiplicando tudo por -1, temos

$$\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)z = 0.$$

Como

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{L}{m},$$

segue que

$$\frac{L}{m}z = 0$$

e, uma vez que $L/m \neq 0$, segue que

$$z = 0$$

em todo instante. Assim, a trajetória de uma partícula sob a ação de uma força central se dá no plano, como já adiantado acima.

Como o movimento é plano, podemos adotar um sistema de coordenadas polares no plano xy. Sendo assim, podemos escrever

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}r\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}r\mathrm{sen}\theta$$

e

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{x}}r\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}r\mathrm{sen}\theta\right) = \frac{d}{dt}\left[r\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta\right)\right],$$

isto é,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta\right)\frac{dr}{dt} + r\frac{d}{dt}\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta\right),$$

ou seja,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta\right)\frac{dr}{dt} + \left(-\hat{\mathbf{x}}\mathrm{sen}\theta + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\right)r\frac{d\theta}{dt}.$$

Vamos utilizar a notação seguinte:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\mathrm{sen}\theta,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{x}}\text{sen}\theta + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta,$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

e

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Note que

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}.$$

Com isso,

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Logo, a equação

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}}$$

fornece

$$(r\hat{\mathbf{r}}) \times \left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}},$$

isto é,

$$r\dot{r}\left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}\right) + r^2\dot{\theta}\left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}}.$$

Mas,

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

e

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\text{sen}\theta\right) \times \left(-\hat{\mathbf{x}}\text{sen}\theta + \hat{\mathbf{y}}\cos\theta\right),$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}}\right)\cos^2\theta - \left(\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}\right)\text{sen}^2\theta = \hat{\mathbf{z}}\left(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta\right) = \hat{\mathbf{z}}.$$

Logo, a equação que obtivemos acima, ou seja,

$$r\dot{r}\left(\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}}\right)+r^2\dot{\theta}\left(\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}},$$

torna-se

$$r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}} = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}},$$

isto é,

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

Você vê como o fato de o momentum angular ser constante ajuda? Agora, além de sabermos que o movimento é no plano, temos também como encontrar uma das variáveis, θ, se soubermos $r = r(t)$. Basta, depois de termos encontrado $r = r(t)$, fazermos uma integração:

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t ds \frac{L}{m\left[r(s)\right]^2}.$$

Como encontramos $r = r(t)$? É simples: basta notarmos que há mais uma constante de movimento, que é a energia total, E:

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\left|\mathbf{v}\right|^2 + U.$$

Como, em coordenadas polares,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

segue que

$$\left|\mathbf{v}\right|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\cdot\left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$

Além disso, como

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U\left(\mathbf{r}_A\right) - U\left(\mathbf{r}_B\right)$$

e como $\mathbf{F}$ é uma força central, segue que

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} F(r)\,\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r}.$$

Mas,

$$d\mathbf{r} = d\left(r\hat{\mathbf{r}}\right) = \hat{\mathbf{r}}dr + rd\hat{\mathbf{r}}$$

e

$$d\hat{\mathbf{r}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}dt = \hat{\boldsymbol{\theta}}\dot{\theta}dt = \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{d\theta}{dt}dt = \hat{\boldsymbol{\theta}}d\theta.$$

Assim,

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta$$

e

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} F(r)\,\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} F(r)\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}dr + \hat{\boldsymbol{\theta}}rd\theta\right) = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} F(r)\,dr.$$

Veja que o integrando só depende do módulo de $\mathbf{r}$ e, portanto, podemos escrever essa integral assim:

$$\int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{|\mathbf{r}_A|}^{|\mathbf{r}_B|} F(r)\,dr.$$

Logo,

$$U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B) = \int_{|\mathbf{r}_A|}^{|\mathbf{r}_B|} F(r)\,dr,$$

para quaisquer pontos A e B. Podemos tomar o ponto A como uma referência para a energia potencial e escolher $U(\mathbf{r}_A) = 0$. Como B é um ponto qualquer, seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B$ e, portanto, $|\mathbf{r}_B| = |\mathbf{r}| = r$. Com essas providências, podemos escrever a equação para $U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$ de uma forma mais compacta:

$$0 - U(\mathbf{r}) = \int_{r_A}^{r} F(s)\,ds,$$

isto é,

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{r_A}^{r} F(s)\,ds,$$

onde defini $r_A = |\mathbf{r}_A|$ para simplificar ainda mais a notação. Com tudo isso em mãos, agora podemos escrever

$$E = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \int_{r_A}^{r} F(s)\,ds.$$

Note que $U(\mathbf{r})$ só depende do módulo de $\mathbf{r}$. Então, para abreviar a expressão da energia total, vou definir a função $V(r)$ como sendo $U(\mathbf{r})$:

$$V(r) = U(\mathbf{r}) = -\int_{r_A}^{r} F(s)\,ds.$$

Portanto,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r).$$

Como já determinamos que

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2},$$

segue que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 + V(r),$$

isto é,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r).$$

Para valores fixos da energia total, E, e da magnitude do momentum angular, L, podemos isolar $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]}.$$

Como

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt},$$

é possível encontrar r como uma função do tempo resolvendo uma integral:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)\right]},$$

isto é,

$$\frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}dt,$$

ou seja,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2ms^2} - V(s)}} = t\sqrt{\frac{2}{m}},$$

onde r_0 é o módulo do vetor posição da partícula calculado no instante inicial $t = 0$.

Segunda lei de Newton em coordenadas polares

Como já sabemos que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

basta derivar mais uma vez essa equação para termos a aceleração em coordenadas polares:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right),$$

isto é,

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt},$$

ou seja,

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{r}},$$

ou ainda,

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Mas, pela segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

e, como a força é central,

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} = F(r)\,\hat{\mathbf{r}}.$$

Logo,

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

e

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r)\,.$$

O fato de que

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

não surpreende, já que o momentum angular é conservado, pois, como vimos,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}}$$

e, portanto,

$$r\hat{\mathbf{r}} \times \left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}},$$

isto é,

$$r^2\dot{\theta}\left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}},$$

ou seja,

$$r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}} = \frac{L}{m}\hat{\mathbf{z}}.$$

Então,

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m},$$

cuja derivada temporal de ambos os membros resulta em

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0,$$

isto é,

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0,$$

ou seja,

$$r\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = 0,$$

ou ainda, para $r \neq 0$,

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0,$$

de acordo com a segunda lei de Newton acima.

Agora consideremos a equação

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F(r).$$

Usando

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2},$$

temos

$$m\ddot{r} - mr\frac{L^2}{m^2r^4} = F(r),$$

isto é,

$$m\ddot{r} \quad = \quad F(r) + \frac{L^2}{mr^3}.$$

Logo, obtivemos um problema unidimensional. Tudo se passa como se uma partícula de massa m se movesse ao longo de uma linha sob a ação de uma força efetiva

$$F(r) + \frac{L^2}{mr^3}.$$

Uma energia potencial efetiva para essa força pode ser escrita como

$$\mathcal{V}(r) \quad = \quad V(r) + \frac{L^2}{2mr^2},$$

pois, como

$$V(r) \quad = \quad -\int_{r_A}^{r} F(s)\, ds,$$

segue que a força efetiva acima decorre do gradiente do potencial efetivo $\mathcal{V}(r)$:

$$-\frac{d\mathcal{V}(r)}{dr} \quad = \quad F(r) + \frac{L^2}{mr^3}.$$

O segundo termo do membro direito dessa equação,

$$\frac{L^2}{mr^3},$$

é a força centrífuga associada ao movimento no referencial da partícula. É por isso que o termo

$$\frac{L^2}{2mr^2}$$

é chamado de potencial centrífugo. Mas essas coisas você vai estudar em uma postagem futura.

Resolução da equação de movimento radial

Para resolver a equação de movimento radial,

$$m\ddot{r} \quad = \quad F(r) + \frac{L^2}{mr^3},$$

o truque é usar a substituição de variável:

$$r \quad = \quad \frac{1}{u}.$$

Então,

$$\dot{r} \quad = \quad -\frac{1}{u^2}\dot{u}$$

e

$$\ddot{r} = \frac{2}{u^3}\dot{u}^2 - \frac{1}{u^2}\ddot{u}.$$

Assim,

$$m\ddot{r} = \frac{2m}{u^3}\dot{u}^2 - \frac{m}{u^2}\ddot{u}$$

e

$$F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2u^3}{m}.$$

Portanto,

$$\frac{2m}{u^3}\dot{u}^2 - \frac{m}{u^2}\ddot{u} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2u^3}{m}$$

Além disso, ao invés de parametrizar o problema em termos do tempo t, vamos parametrizar em termos do ângulo polar θ. Então,

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = \frac{L}{mr^2}\frac{du}{d\theta} = \frac{Lu^2}{m}\frac{du}{d\theta}.$$

Também,

$$\ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{Lu^2}{m}\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{Lu^2}{m}\frac{du}{d\theta}\right),$$

isto é,

$$\ddot{u} = \frac{Lu^2}{m}\left[\frac{2Lu}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{Lu^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\right] = \frac{2L^2u^3}{m^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2u^4}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Substituindo essas expressões para $\dot{u}$ e $\ddot{u}$ na equação de movimento,

$$\frac{2m}{u^3}\dot{u}^2 - \frac{m}{u^2}\ddot{u} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2u^3}{m},$$

dá

$$\frac{2m}{u^3}\frac{L^2u^4}{m^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{m}{u^2}\frac{2L^2u^3}{m^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{m}{u^2}\frac{L^2u^4}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2u^3}{m},$$

isto é,

$$\frac{2L^2u}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{2L^2u}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 - \frac{L^2u^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2u^3}{m},$$

ou seja,

$$-\frac{L^2u^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = F\left(\frac{1}{u}\right)+\frac{L^2u^3}{m},$$

ou ainda,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u-\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right).$$

Veja que quando a força for inversamente proporcional ao quadrado da distância, como a força gravitacional ou eletrostática, teremos

$$F(r) = \frac{K}{r^2},$$

isto é,

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = Ku^2$$

e, portanto, a equação de movimento fica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u-\frac{mK}{L^2},$$

que é praticamente uma equação do oscilador harmônico e, portanto, muito fácil de resolver. Mas esse é assunto para outra postagem.