Conservação de energia para um sistema de partículas

Na postagem sobre a energia gravitacional de um sistema de partículas, mostrei que a energia potencial gravitacional de N partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_N$ é dada por

$$\begin{aligned} U^{(int)} &= -\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}, \end{aligned}$$

com sobrescrito (int), que será explicado logo a seguir. Veja que essa energia potencial é uma função de todas as coordenadas das N partículas, isto é,

$$U^{(int)} = U^{(int)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N).$$

Veja também que a força sobre a k-ésima partícula, devida às demais, é dada pelo gradiente de U com relação às coordenadas de seu vetor posição, $\mathbf{r}_k$:

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\boldsymbol{\nabla}_k U^{(int)} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial U^{(int)}}{\partial y_k} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U^{(int)}}{\partial z_k}.$$

Note que escrevi $\mathbf{F}_k^{(int)}$ e $U^{(int)}$, com sobrescrito (int), para enfatizar que essas forças são internas, devidas às partículas do próprio sistema. Então,

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|^2}\frac{\partial\,|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}{\partial x_k}\right].$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\,|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2} \\ &= \frac{(x_j-x_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}\frac{\partial\,(x_j-x_i)}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial\,|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}{\partial x_k} = \frac{(x_j-x_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k}-\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right),$$

ou seja,

$$\frac{\partial\,|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}{\partial x_k} = \frac{(x_j-x_i)}{|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|}(\delta_{jk}-\delta_{ik}),$$

onde δ_{jk} é a delta de Kronecker. Substituindo esse resultado na expressão para a derivada parcial de U com relação a x_k, obtemos

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{Gm_im_j\,(x_j - x_i)}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|^3}\,(\delta_{jk} - \delta_{ik})\right],$$

isto é,

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{Gm_im_j\,(x_j - x_i)}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|^3}\delta_{jk} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{Gm_im_j\,(x_j - x_i)}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right|^3}\delta_{ik},$$

ou seja,

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(x_k - x_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1 \\ (k\neq j)}}^{N}\frac{Gm_km_j\,(x_j - x_k)}{\left|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\right|^3},$$

ou ainda,

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(x_k - x_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ (k\neq i)}}^{N}\frac{Gm_km_i\,(x_i - x_k)}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\right|^3} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(x_k - x_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3}.$$

Analogamente, portanto,

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial y_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(y_k - y_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3}$$

e

$$\frac{\partial U^{(int)}}{\partial z_k} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(z_k - z_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3}.$$

Com essas derivadas parciais, podemos agora escrever a força interna sobre a k-ésima partícula:

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial U^{(int)}}{\partial x_k} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial U^{(int)}}{\partial y_k} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial U^{(int)}}{\partial z_k},$$

isto é,

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\hat{\mathbf{x}}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(x_k - x_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3} - \hat{\mathbf{y}}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(y_k - y_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3} - \hat{\mathbf{z}}\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N}\frac{Gm_im_k\,(z_k - z_i)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3},$$

ou seja,

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N} \frac{Gm_i m_k \left(\hat{\mathbf{x}}x_k - \hat{\mathbf{x}}x_i + \hat{\mathbf{y}}y_k - \hat{\mathbf{y}}y_i + \hat{\mathbf{z}}z_k - \hat{\mathbf{z}}z_i\right)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3},$$

ou ainda,

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N} \frac{Gm_i m_k \left[\left(\hat{\mathbf{x}}x_k + \hat{\mathbf{y}}y_k + \hat{\mathbf{z}}z_k\right) - \left(\hat{\mathbf{x}}x_i + \hat{\mathbf{y}}y_i + \hat{\mathbf{z}}z_i\right)\right]}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3}.$$

Portanto,

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\sum_{\substack{i=1 \\ (i\neq k)}}^{N} \frac{Gm_i m_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right)}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\right|^3},$$

como deve ser mesmo. Esse exemplo da força gravitacional sobre uma das partículas do sistema, exercida pelas demais, ilustra o caso de um sistema de partículas interagentes, duas a duas, com uma força conservativa. Nesse caso, a força interna sobre a k-ésima partícula é dada por

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = -\boldsymbol{\nabla}_k U^{(int)}.$$

No caso em que a força externa sobre a k-ésima partícula também é conservativa, temos

$$\mathbf{F}_k^{(ext)} = -\boldsymbol{\nabla}_k U^{(ext)},$$

onde $U^{(ext)}$ é a energia potencial externa. Então, a força resultante sobre o sistema é dada por

$$\mathbf{F}_k^{(int)} + \mathbf{F}_k^{(ext)} = -\boldsymbol{\nabla}_k U^{(int)} - \boldsymbol{\nabla}_k U^{(ext)} = -\boldsymbol{\nabla}_k \left(U^{(int)} + U^{(ext)}\right) = -\boldsymbol{\nabla}_k U,$$

onde U é a energia potencial total:

$$U = U^{(int)} + U^{(ext)}.$$

Como a equação de movimento para a k-ésima partícula é dada por

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k^{(ext)} + \mathbf{F}_k^{(int)},$$

segue que

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}_k U,$$

onde

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k.$$

Multiplicando escalarmente ambos os membros da equação de movimento por $\mathbf{v}_k$, podemos escrever

$$m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = -\mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}_k U,$$

isto é,

$$\frac{1}{2} m_k \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k) = -\mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}_k U,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_k |\mathbf{v}_k|^2 \right) = -\mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}_k U.$$

Note agora que

$$\mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}_k U = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \cdot \boldsymbol{\nabla}_k U = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \cdot \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial U}{\partial x_k} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial U}{\partial y_k} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial U}{\partial z_k} \right),$$

isto é,

$$\mathbf{v}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}_k U = \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt}.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_k |\mathbf{v}_k|^2 \right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right).$$

Somando ambos os membros sobre k, vem

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k |\mathbf{v}_k|^2 \right) = -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right).$$

Mas veja que, como

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N) = U(x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \ldots, x_N(t), y_N(t), z_N(t)),$$

segue, pela regra da cadeia para derivadas, que

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k |\mathbf{v}_k|^2 \right) = -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right) = -\frac{dU}{dt}$$

e, assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\left|\mathbf{v}_k\right|^2+U\right) = 0.$$

Com isso, definindo a energia cinética total do sistema como

$$T = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}m_k\left|\mathbf{v}_k\right|^2,$$

vemos que a energia total, definida como

$$E = T+U,$$

é conservada para forças internas e externas conservativas.