Colisões entre duas partículas clássicas

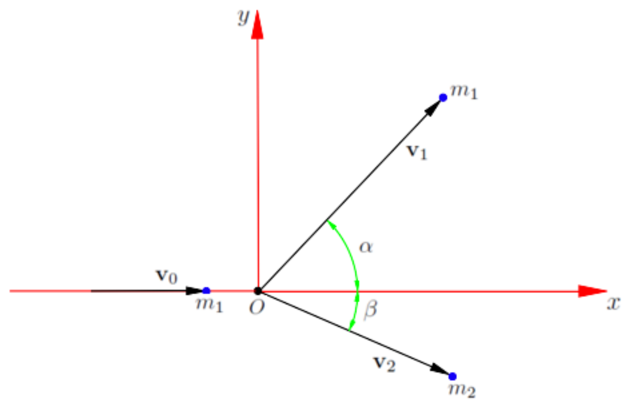
Sejam duas partículas de massas m_1 e m_2. Em problemas de colisões, tipicamente as partículas vêm de longe, onde a interação entre elas pode ser desprezada. Então, inicialmente, as partículas estão com velocidades constantes. Assim, sempre é possível escolher um referencial inercial que, inicialmente, caminha junto com a partícula de massa m_2, por exemplo. Nesse referencial a partícula de massa m_1 se aproxima com uma velocidade inicial constante da partícula de massa m_2, inicialmente em repouso. Vou tomar o eixo x ao longo da direção e do sentido da velocidade inicial da partícula de massa m_1. Seja v_0 o módulo da velocidade inicial da partícula de massa m_1. Depois da colisão, as partículas de massas m_1 e m_2 terão velocidades de magnitudes v_1 e v_2, respectivamente. É claro que, inicialmente, a partícula de massa m_2 pode não estar localizada sobre o eixo x. Vou tomar o plano xy como aquele que, inicialmente, contém ambas as partículas. Depois da colisão, o momentum total das duas partículas deve ser igual ao momentum inicial da partícula de massa m_1, pois há conservação de momentum total. No entanto, embora possa haver conservação de momentum total mesmo no caso em que as velocidades finais das partículas não estejam sobre o plano inicial, xy, não há razão nenhuma para que uma rotação do plano das partículas ocorra no sentido horário ou anti-horário, já que o espaço é isotrópico. Então, após a colisão, ambas as partículas continuarão sobre o plano xy. Sejam α e β os ângulos que as velocidades das partículas de massas m_1 e m_2 fazem com o eixo x, respectivamente. Com isso, a conservação de momentum total ao longo do eixo x dá

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta. \qquad (1)$$

Ao longo do eixo y, a conservação do momentum total dá

$$0 = m_1 v_1 \mathrm{sen}\alpha - m_2 v_2 \mathrm{sen}\beta. \qquad (2)$$

A figura abaixo mostra uma ilustração esquemática da colisão.



Colisões elásticas

Quando, além do momentum total, a energia cinética total também é conservada, a colisão é chamada elástica. Nesse caso, podemos escrever

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 \quad = \quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \qquad (3)$$

e temos mais uma equação. Há várias maneiras de interpretar essas equações e de utilizá-las. Como exemplo, vou supor que as massas e a velocidade inicial, v_0, são conhecidas. Depois da colisão, vou supor que o ângulo α é medido e, portanto, conhecido. Nesse caso, temos três equações e três incógnitas: v_1, v_2 e β. Vamos eliminar o ângulo β usando as Eqs. (1) e (2). A Eq. (1) fornece

$$m_1 v_0 - m_1 v_1 \cos\alpha \quad = \quad m_2 v_2 \cos\beta,$$

que, elevando ambos os membros ao quadrado, resulta em

$$(m_1 v_0 - m_1 v_1 \cos\alpha)^2 \quad = \quad (m_2 v_2)^2 \cos^2\beta. \qquad (4)$$

A Eq. (2) fornece

$$m_1 v_1 \mathrm{sen}\alpha \quad = \quad m_2 v_2 \mathrm{sen}\beta.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem

$$(m_1 v_1)^2 \,\mathrm{sen}^2\alpha \quad = \quad (m_2 v_2)^2 \,\mathrm{sen}^2\beta,$$

que, somada membro a membro com a Eq. (4) dá

$$(m_1 v_0 - m_1 v_1 \cos\alpha)^2 + (m_1 v_1)^2 \operatorname{sen}^2\alpha \quad = \quad (m_2 v_2)^2 \,,$$

isto é,

$$(m_1 v_0)^2 - 2m_1^2 v_0 v_1 \cos\alpha + (m_1 v_1)^2 \cos^2\alpha + (m_1 v_1)^2 \operatorname{sen}^2\alpha \quad = \quad (m_2 v_2)^2 \,,$$

ou seja,

$$(m_1 v_0)^2 - 2m_1^2 v_0 v_1 \cos\alpha + (m_1 v_1)^2 \quad = \quad (m_2 v_2)^2 \,. \qquad (5)$$

Da Eq. (3) segue que

$$m_2 v_2^2 \quad = \quad m_1 v_0^2 - m_1 v_1^2$$

e, portanto,

$$(m_2 v_2)^2 \quad = \quad m_1 m_2 v_0^2 - m_1 m_2 v_1^2. \qquad (6)$$

Das Eqs. (5) e (6) segue

$$(m_1 v_0)^2 - 2m_1^2 v_0 v_1 \cos\alpha + (m_1 v_1)^2 \quad = \quad m_1 m_2 v_0^2 - m_1 m_2 v_1^2,$$

isto é,

$$1 - 2\frac{v_1}{v_0}\cos\alpha + \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \quad = \quad \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2,$$

onde dividi ambos os membros por $(m_1 v_0)^2$, supondo que não é nulo, caso contrário não haveria colisão. Assim,

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - 2\frac{v_1}{v_0}\cos\alpha + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$(m_1 + m_2)\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 - 2m_1\frac{v_1}{v_0}\cos\alpha + (m_1 - m_2) \quad = \quad 0. \qquad (7)$$

A solução da Eq. (7) para v_1/v_0 dá

$$\frac{v_1}{v_0} \quad = \quad \frac{2m_1\cos\alpha \pm \sqrt{4m_1^2\cos^2\alpha - 4\,(m_1+m_2)\,(m_1-m_2)}}{2\,(m_1+m_2)},$$

isto é,

$$\frac{v_1}{v_0} \quad = \quad \frac{m_1\cos\alpha \pm \sqrt{m_1^2\cos^2\alpha - (m_1+m_2)\,(m_1-m_2)}}{m_1+m_2},$$

ou seja,

$$\frac{v_1}{v_0} \quad = \quad \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\alpha \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\alpha - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)}. \qquad (8)$$

Caso em que a massa da partícula incidente é maior do que a da partícula alvo

Nesse caso, $m_1 > m_2$ e, portanto, há um ângulo $\alpha = \alpha_M$ tal que a quantidade dentro do radical dá zero:

$$\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\alpha_M - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right) \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$\frac{m_1^2}{m_1+m_2}\cos^2\alpha_M \quad = \quad m_1 - m_2,$$

ou seja,

$$\cos^2\alpha_M \quad = \quad \frac{m_1^2-m_2^2}{m_1^2},$$

ou ainda,

$$\cos^2\alpha_M \quad = \quad 1-\frac{m_2^2}{m_1^2}.$$

Como m_2/m_1, nesse caso, pode assumir valores no intervalo $[0,1)$, segue que α_M pertence ao intervalo $[0,\pi/2)$. Nesse intervalo, o cosseno é decrescente e se $\alpha > \alpha_M$ na Eq. (8), então a quantidade dentro do radical torna-se negativa, resultando em uma solução para v_1/v_0 que não é fisicamente possível; isso se tanto α como α_M estiverem dentro do intervalo $[0,\pi/2)$, mas com $\alpha > \alpha_M$. Caso α_M pertença ao intervalo $[0,\pi/2)$, mas α esteja no intervalo $[\pi/2,\pi)$, a quantidade dentro do radical pode ficar positiva de novo, mas nesse caso o cosseno é crescente e a raiz quadrada na Eq. (8) passa a ter módulo menor do que o módulo do primeiro termo dessa equação, que agora é negativo. Então, nesse caso, v_1/v_0 torna-se menor do que zero, o que também é fisicamente impossível. Logo, α_M é o maior ângulo para o qual há espalhamento da partícula de massa $m_1 > m_2$ pela partícula de massa m_2. Veja que quando $m_1 \gg m_2$ o ângulo α_M é muito pequeno e, portanto, quando a partícula incidente é muito massiva, seu ângulo de espalhamento deve ser muito pequeno, como esperado intuitivamente.

Quando $\alpha < \alpha_M$ a quantidade dentro do radical da Eq. (8) é positiva, mas não maior, em módulo, do que o primeiro termo da equação e, nesse caso, há duas soluções possíveis para v_1/v_0. Por exemplo, o caso em que $\alpha = 0$ dá dois possíveis resultados:

$$\frac{v_1}{v_0} \quad = \quad \frac{m_1}{m_1+m_2} \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)},$$

isto é,

$$\frac{v_1}{v_0} \quad = \quad \frac{m_1}{m_1+m_2} \pm \sqrt{\frac{m_1^2-m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2}},$$

ou seja,

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \pm \sqrt{\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}},$$

ou ainda,

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{m_1 \pm m_2}{m_1+m_2}.$$

Assim,

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} = 1,$$

significando que não há colisão alguma, ou

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2},$$

mostrando o valor da nova velocidade da partícula de massa $m_1$quando há uma colisão frontal. Nesse caso, a Eq. (3) dá

$$m_2 v_2^2 = m_1 v_0^2 - m_1 v_1^2,$$

isto é,

$$m_2 \frac{v_2^2}{v_0^2} = m_1 - m_1 \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2,$$

ou seja,

$$m_2 \frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{m_1^2 + 2m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{-m_1^3 + 2m_1^2 m_2 - m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2},$$

ou ainda,

$$\frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}.$$

Logo, para colisão frontal,

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}. \qquad (9)$$

Nesse caso, segue da Eq. (2) que

$$m_2 v_2 \mathrm{sen}\beta = m_1 v_1 \mathrm{sen}\alpha = 0$$

e, portanto,

$$\beta = 0.$$

Caso em que as massas da partícula incidente e da partícula alvo são iguais

No caso em que $m_1 = m_2 = m$, a Eq. (8) dá

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}\cos\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}\cos\alpha \pm \frac{1}{2}\left|\cos\alpha\right|.$$

Como v_1/v_0 só faz sentido se não for negativo, α não pode ser maior do que $\pi/2$. Então, para α no intervalo $[0, \pi/2]$, podemos escrever

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{2}\cos\alpha \pm \frac{1}{2}\cos\alpha$$

e, portanto,

$$\frac{v_1}{v_0} = 0$$

ou

$$\frac{v_1}{v_0} = \cos\alpha.$$

O primeiro caso está contido no segundo, basta tomar $\alpha = \pi/2$. Logo, vou ficar só com a solução

$$\frac{v_1}{v_0} = \cos\alpha.$$

Nesse caso, a Eq. (3) fornece

$$v_2^2 = v_0^2 - v_1^2 = v_0^2\left(1 - \cos^2\alpha\right) = v_0^2 \mathrm{sen}^2\alpha,$$

isto é,

$$\frac{v_2}{v_0} = \mathrm{sen}\alpha.$$

A Eq. (2) implica em

$$v_2 \mathrm{sen}\beta = v_1 \mathrm{sen}\alpha,$$

isto é,

$$\mathrm{sen}\beta = \cos\alpha.$$

Pela figura acima, vemos que

$$\beta = \pi/2 - \alpha.$$

Veja que quando $\alpha = 0$ não há colisão, mas quando $\alpha = \pi/2$, $v_1 = 0$ e $v_2 = v_0$, indicando uma transferência do momentum da partícula incidente para a partícula alvo, que sai com $\beta = 0$.

Caso em que a massa da partícula incidente é menor do que a da partícula alvo

No caso em que $m_1 < m_2$, a Eq. (8) apresenta apenas uma solução fisicamente possível:

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\alpha + \sqrt{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\alpha - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)}, \qquad (10)$$

pois, nesse caso, a quantidade no radical é maior do que o primeiro termo dessa equação. É fácil ver que se utilizarmos o sinal negativo no lugar do sinal positivo, v_1 fica negativo, o que não é possível fisicamente. Nesse caso, todos os valores de α no intervalo $[0, \pi]$ são permitidos. Quando $\alpha = 0$, segue da Eq. (10) que

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{m_1}{m_1+m_2} + \sqrt{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)} = \frac{m_1}{m_1+m_2} + \sqrt{\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}} = 1,$$

isto é, não há colisão. Já quando $\alpha = \pi$, segue que

$$\frac{v_1}{v_0} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} + \sqrt{\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}} = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}.$$

Da Eq. (3) vem

$$m_2\frac{v_2^2}{v_0^2} = m_1 - m_1\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)^2 = m_1 - m_1\frac{m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2}{(m_1+m_2)^2},$$

isto é,

$$m_2\frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{m_1m_2^2 + 2m_1^2m_2 + m_1^3 - m_1m_2^2 + 2m_1^2m_2 - m_1^3}{(m_1+m_2)^2} = \frac{4m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2},$$

ou seja,

$$\frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2},$$

ou ainda,

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{2m_1}{m_1+m_2},$$

que é idêntica à Eq. (9). Finalmente, a Eq. (2) dá

$$m_2v_2\text{sen}\beta = m_1v_1\text{sen}\alpha = 0,$$

isto é,

$$\beta = 0.$$

O caso da determinação da massa da partícula incidente

Em 1932, [http://pt.wikipedia.org/wiki/James_Chadwick Chadwick] estabeleceu a existência do nêutron pela determinação de sua massa através da análise de experimentos de colisões entre nêutrons e núcleos conhecidos. Então, vamos supor que possamos medir a energia inicial da partícula incidente, cuja massa m_1 queremos determinar. Vamos supor também que a massa m_2 da partícula alvo também seja conhecida. Ao medirmos a energia final da partícula alvo em uma colisão frontal, podemos determinar a massa m_1. Para ver isso, seja a energia inicial da partícula incidente dada por

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1 v_0^2$$

e a energia final da partícula alvo dada por

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2.$$

Dividindo uma dessas equações pela outra dá

$$\frac{T_0}{T_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{v_0^2}{v_2^2}.$$

Usando a Eq. (9), para colisão frontal, obtemos

$$\left(\frac{v_0}{v_2}\right)^2 = \frac{(m_1+m_2)^2}{4m_1^2}.$$

Note que esse valor é o mesmo caso a massa m_1 seja maior ou seja menor do que m_2. Portanto,

$$\frac{T_0}{T_2} = \frac{m_1}{m_2}\frac{(m_1+m_2)^2}{4m_1^2} = \frac{m_1^2+2m_1m_2+m_2^2}{4m_1m_2} = \frac{m_1^2}{4m_1m_2} + \frac{2m_1m_2}{4m_1m_2} + \frac{m_2^2}{4m_1m_2},$$

isto é,

$$\frac{2T_0}{T_2} - 1 = \frac{m_1}{2m_2} + \frac{m_2}{2m_1},$$

ou seja,

$$2\left(\frac{2T_0}{T_2} - 1\right)\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^2}{m_2^2} + 1,$$

ou ainda,

$$\frac{m_1^2}{m_2^2} - 2\left(\frac{2T_0}{T_2} - 1\right)\frac{m_1}{m_2} + 1 = 0.$$

Resolvendo essa equação, obtemos

$$\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{2T_0}{T_2} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2T_0}{T_2} - 1\right)^2 - 1}.$$

Fazendo colisões frontais com duas partículas alvo de massas m_2 e m_3, podemos encontrar o valor de m_1.

Colisões inelásticas

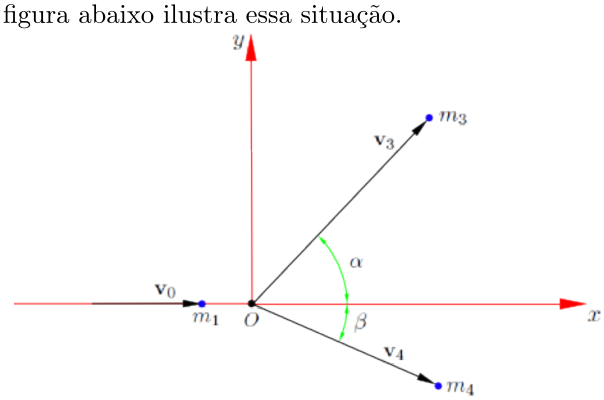
A colisão é dita inelástica quando a energia cinética total não é conservada. Note que estou falando da energia cinética dos produtos da reação, depois da colisão e da energia cinética dos reagentes, antes da colisão. Para simplificar a análise, vamos considerar que a partícula de massa m_1 incida, com velocidade v_0, sobre a partícula alvo, de massa m_2, inicialmente em repouso. Após a colisão, vamos supor que duas partículas de massas m_3 e m_4, não necessariamente as mesmas de antes da colisão, tenham velocidades finais v_3 e v_4. Se os ângulos com a direção da velocidade da partícula incidente são dados por α e β, segue, da conservação do momentum, que

$$m_1 v_0 \quad = \quad m_3 v_3 \cos\alpha + m_4 v_4 \cos\beta \qquad (11)$$

e

$$0 \quad = \quad m_3 v_3 \mathrm{sen}\alpha - m_4 v_4 \mathrm{sen}\beta. \qquad (12)$$

A figura abaixo ilustra essa situação.



A energia cinética total não é coservada e, assim, seja Q a energia que deve ser absorvida na reação para que a energia total seja conservada. Então,

$$T_0 + Q \quad = \quad T_3 + T_4, \qquad (13)$$

onde as energias cinéticas assintóticas são definidas como

$$T_0 \quad = \quad \frac{1}{2} m_1 v_0^2,$$

$$T_3 \quad = \quad \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

e

$$T_4 \quad = \quad \frac{1}{2} m_4 v_4^2.$$

Como exemplo, vamos calcular Q e vamos supor conhecido o momentum inicial, $m_1 v_0$, e as massas m_1, m_2, m_3 e m_4. Então vamos supor que o momentum

$p_3 = m_3 v_3$ e o ângulo α sejam medidos. Com isso, precisamos calcular Q. Então vamos eliminar o ângulo β e $m_4 v_4$ das Eqs. (11) e (12). Da Eq. (11) segue que

$$p_0 - p_3 \cos\alpha = p_4 \cos\beta, \qquad (14)$$

onde definimos

$$p_0 = m_1 v_0,$$

$$p_3 = m_3 v_3$$

e

$$p_4 = m_4 v_4.$$

Logo, elevando a Eq. (14) ao quadrado, obtemos

$$p_0^2 - 2p_0 p_3 \cos\alpha + p_3^2 \cos^2\alpha = p_4^2 \cos^2\beta. \qquad (15)$$

Elevando a Eq. (12) ao quadrado dá

$$p_3^2 \mathrm{sen}^2\alpha = p_4^2 \mathrm{sen}^2\beta,$$

que, somada membro a membro com a Eq. (15) fornece

$$p_0^2 - 2p_0 p_3 \cos\alpha + p_3^2 = p_4^2. \qquad (16)$$

A Eq. (13) pode ser expressa em termos dos momenta como

$$Q = T_3 + T_4 - T_0 = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_4^2}{2m_4} - \frac{p_0^2}{2m_1},$$

isto é,

$$Q = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_0^2 - 2p_0 p_3 \cos\alpha + p_3^2}{2m_4} - \frac{p_0^2}{2m_1},$$

onde já substituí a Eq. (16). Rearranjando, temos

$$Q = \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{p_3^2}{2m_4} + \frac{p_0^2}{2m_4} - \frac{p_0^2}{2m_1} - \frac{p_0 p_3 \cos\alpha}{m_4},$$

isto é,

$$Q = T_3 \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - T_0 \left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - \frac{\sqrt{4m_1 T_0 m_3 T_3}}{m_4} \cos\alpha,$$

ou seja,

$$Q = T_3 \left(1 + \frac{m_3}{m_4}\right) - T_0 \left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - 2\sqrt{\frac{m_1 m_3 T_0 T_3}{m_4^2}} \cos\alpha.$$

Colisões completamente inelásticas

Vamos agora considerar o caso em que a partícula de massa m_1 e velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ colide com a partícula alvo em repouso, de massa m_2, e ambas ficam grudadas e passam a caminhar juntas com velocidade final $\mathbf{v}$. Nesse caso, a conservação de momentum dá

$$m_1 \mathbf{v}_0 = (m_1 + m_2)\, \mathbf{v}$$

e, portanto,

$$\mathbf{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_0.$$

A enercia cinética não é conservada e podemos calcular a quantidade de energia Q, que é dissipada na colisão escrevendo

$$T_0 = T + Q,$$

onde

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$$

e

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v^2.$$

Logo,

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_0^2,$$

isto é,

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right),$$

ou seja,

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Coeficiente de restituição

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 que se chocam frontalmente ao longo do eixo x, com velocidades iniciais $v_1^{(0)}$ e $v_2^{(0)}$, respectivamente. Se suas velocidades finais são dadas por v_1 e v_2, então Newton observou a seguinte relação entre as velocidades relativas inicial e final:

$$v_2 - v_1 = -e \left(v_2^{(0)} - v_1^{(0)} \right),$$

onde e, chamado de coeficiente de restituição, é não negativo e menor ou igual à unidade. Quando $e = 0$, a colisão é completamente inelástica e quando $e = 1$, a colisão é perfeitamente elástica. Tipicamente, essa relação é utilizada juntamente com a conservação de momentum ao longo do eixo x,

$$m_2 v_2 + m_1 v_1 \quad = \quad m_2 v_2^{(0)} + m_1 v_1^{(0)},$$

para resolver problemas em que as velocidades finais são obtidas quando as velocidade iniciais são dadas.