Paridade, densidade de transição e tempos discretos

A paridade entre os preços de opções de compra e venda do tipo europeu

Aqui, como em todas as outras postagens anteriores, não consideramos ativos que pagam dividendos ou juros sobre o capital próprio. Consideremos duas carteiras: uma composta de apenas uma opção de venda e outra em que há a opção de compra, uma ação vendida a descoberto e

$$X \exp\left[-r\left(T-t\right)\right]$$

em títulos livres de risco. O tempo presente é t, o tempo de exercício é T, a taxa de juros livre de risco é r e o preço de exercício é X. Aqui supomos que as opções de venda e de compra têm o mesmo preço X de exercício. No dia de vencimento (ou de exercício) de opções, a carteira composta apenas de uma opção de venda valerá

$$p\left(S_T, 0\right) = \max\left(X - S_T, 0\right).$$

Já a segunda carteira, em qualquer tempo anterior ao vencimento, tem o valor

$$M\left(T-t\right) = c\left(S, T-t\right) - S + X \exp\left[-r\left(T-t\right)\right].$$

Ora, no vencimento, essa carteira valerá

$$M\left(0\right) = \max\left(S_T - X, 0\right) - S_T + X.$$

Se

$$S_T \geqslant X,$$

então

$$M\left(0\right) = S_T - X - S_T + X = 0.$$

Se

$$S_T < X,$$

então

$$M\left(0\right) = 0 - S_T + X = X - S_T.$$

Logo,

$$M\left(0\right) = \max\left(X - S_T, 0\right),$$

como o valor da primeira carteira no vencimento. Como ambas as opções são do tipo europeu, nenhuma pode ser exercida antes do vencimento. Supondo que não haja oportunidade de obter lucros sem risco, as duas carteiras deverão ter o mesmo valor em qualquer tempo anterior ao vencimento, analogamente aos raciocínios expostos na postagem Contratos futuros e opções. Portanto, o preço justo da opção de venda será dado por

$$p\left(S,T-t\right) \quad = \quad c\left(S,T-t\right)-S+X\exp\left[-r\left(T-t\right)\right].$$

Função densidade de transição

Em meio a dedução da solução da equação de Black e Scholes da postagem O preço de uma opção de compra segundo a teoria de Black, Scholes e Merton, obtivemos a fórmula

$$c\left(S,|t|\right) \quad = \quad \frac{\exp\left(-r\,|t|\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2\,|t|}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx'c\left(\exp\left(x'\right),0\right)\exp\left[\frac{-\left(\ln S-x'+r\,|t|-\frac{\sigma^2}{2}\,|t|\right)^2}{2\sigma^2\,|t|}\right],$$

para o preço justo da opção de compra. Podemos fazer uma mudança de variável de integração:

$$x' \quad = \quad \ln S_T.$$

Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
c\left(S,|t|\right) &= \frac{\exp\left(-r\,|t|\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2\,|t|}}\int_0^{\infty}\frac{dS_T}{S_T}c\left(\exp\left(\ln S_T\right),0\right)\exp\left[\frac{-\left(\ln S-\ln S_T+r\,|t|-\frac{\sigma^2}{2}\,|t|\right)^2}{2\sigma^2\,|t|}\right]\\
&= \frac{\exp\left(-r\,|t|\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2\,|t|}}\int_0^{\infty}\frac{dS_T}{S_T}c\left(S_T,0\right)\exp\left[\frac{-\left(\ln S-\ln S_T+r\,|t|-\frac{\sigma^2}{2}\,|t|\right)^2}{2\sigma^2\,|t|}\right]\\
&= \exp\left(-r\,|t|\right)\int_0^{\infty}dS_Tc\left(S_T,0\right)\frac{1}{S_T\sigma\sqrt{2\pi\,|t|}}\exp\left[\frac{-\left(\ln S-\ln S_T+r\,|t|-\frac{\sigma^2}{2}\,|t|\right)^2}{2\sigma^2\,|t|}\right]\\
&= \exp\left(-r\,|t|\right)\int_0^{\infty}dS_Tc\left(S_T,0\right)\psi\left(S_T,S;|t|\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\psi\left(S_T,S;|t|\right) \quad = \quad \frac{1}{S_T\sigma\sqrt{2\pi\,|t|}}\exp\left[\frac{-\left(\ln S-\ln S_T+r\,|t|-\frac{\sigma^2}{2}\,|t|\right)^2}{2\sigma^2\,|t|}\right]$$

é a chamada função densidade de transição. Tipicamente, fazemos

$$|t| \quad \rightarrow \quad T-t,$$

onde t é o tempo presente e T é o tempo de exercício. Assim, escrevemos

$$c\left(S,T-t\right) \quad = \quad \exp\left[-r\left(T-t\right)\right]\int_{0}^{\infty} dS_{T}c\left(S_{T},0\right)\psi\left(S_{T},S;T-t\right)$$

e, portanto,

$$\psi\left(S_{T},S;T-t\right) \quad = \quad \frac{1}{S_{T}\sigma\sqrt{2\pi\left(T-t\right)}}\exp\left\{-\frac{\left[\ln\frac{S}{S_{T}}+\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)\left(T-t\right)\right]^{2}}{2\sigma^{2}\left(T-t\right)}\right\}.$$

A fórmula de Black e Scholes para o caso de tempos discretos

A fórmula de Black e Scholes que deduzimos anteriormente é válida para o tempo contínuo. No entanto, normalmente nós temos pregões e preços de fechamento diários. Mesmo em negociações durante o pregão, é comum dividir o dia em períodos de durações iguais e tomar os preços finais nesses períodos. Tipicamente, então, temos uma discretização temporal. Consideremos o caso diário. Seja T o pregão de vencimento e t o pregão atual. Assim, $T-t$ é o número de pregões até o vencimento das opções. Seja f a taxa de juros diária. Então, devemos substituir

$$\exp\left[r\left(T-t\right)\right] \quad = \quad \left(1+f\right)^{T-t}$$

na fórmula de Black e Scholes acima. Notemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
d_{1} &= \frac{\ln\left(S/X\right)+\left(r+\frac{\sigma^{2}}{2}\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}} \\
&= \frac{\ln\left(S/X\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}+\frac{\left(r+\frac{\sigma^{2}}{2}\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}} \\
&= \frac{\ln\left(S/X\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}+\frac{r\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}+\frac{\frac{\sigma^{2}}{2}\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}} \\
&= \frac{\ln\left(S/X\right)+r\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}+\frac{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}{2} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}\ln\left\{\frac{S\exp\left[r\left(T-t\right)\right]}{X}\right\}+\frac{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}{2}.
\end{aligned}$$

Com a substituição acima, obtemos:

$$d_{1} \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}\ln\left\{\frac{S\left(1+f\right)^{T-t}}{X}\right\}+\frac{\sigma\sqrt{\left(T-t\right)}}{2}$$

e, como anteriormente,

$$d_2 \quad = \quad d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}.$$

Então, a fórmula de Black e Scholes para o tempo discretizado fica:

$$c\,(S,|t|) \quad = \quad SN\,(d_1) - \frac{X}{(1+f)^{T-t}}N\,(d_2)\,.$$