A estratégia de negociação dinâmica auto-financiada

Construamos uma carteira em que temos, em cada instante t, um montante de ações $M_S(t)$, um montante de opções $M_V(t)$ e um montante de títulos livres de risco $B(t)$. Como as ações, as opções e os títulos podem ser comprados ou vendidos, inclusive podem ser vendidos a descoberto, os montantes podem ser positivos ou negativos. Portanto, podemos construir uma carteira em que nenhum montante em dinheiro é investido jamais, nem mesmo no instante inicial. Uma carteira assim é chamada auto-financiada.

Se o preço da ação no instante t for dado por

$$S = S(t)$$

e o preço da opção for dado por

$$V = V(t),$$

o valor da carteira nesse instante será

$$M(t) = M_S(t) + M_V(t) + B(t) = SQ_S(t) + VQ_V(t) + B(t),$$

onde $Q_S(t)$ e $Q_V(t)$ são as quantidades, positivas ou negativas, de ações e opções, respectivamente, no instante t.

Como na postagem O argumento da neutralidade de risco para obter a equação de Black e Scholes, os preços da ação e da opção satisfazem as respectivas equações estocásticas abaixo:

$$dS = \rho S dt + \sigma S dW$$

e

$$dV = \rho_V V dt + \sigma_V V dW.$$

Usando o lema de Ito, vem

$$\rho_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \rho S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)$$

e

$$\sigma_V = \frac{\sigma S}{V}\frac{\partial V}{\partial S}.$$

A dinâmica do valor da carteira é obtida tomando a diferencial do valor da carteira, que é dado por

$$M(t) = M_S(t) + M_V(t) + B(t) = SQ_S(t) + VQ_V(t) + B(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} dM(t) &= [Q_S(t)\,dS + Q_V(t)\,dV + rB(t)\,dt] \\ &+ \{SdQ_S(t) + VdQ_V(t) + dB(t)\}, \end{aligned}$$

onde estamos usando o fato de que o valor dos títulos varia de um incremento $rB(t)\,dt$, com taxa de juros livre de risco r. Notemos que o montante em títulos pode mudar porque o preço dos títulos muda de $rB(t)\,dt$ ou porque a quantidade muda de $dB(t)$, já que podem ser comprados ou vendidos.

Os três termos somados entre colchetes no segundo membro da equação para $dM(t)$ acima dão a variação do valor da carteira sem termos que fazer qualquer negociação, bastando que os preços dos títulos, das ações e das opções variem. Já os três termos somados entre chaves dão a variação do valor da carteira quando compramos e vendemos esses três ativos financeiros. Como a estratégia é auto-financiada, não colocamos ou tiramos nenhum dinheiro na carteira por meio dessas negociações, isto é,

$$SdQ_S(t) + VdQ_V(t) + dB(t) = 0.$$

Com isso, a equação para $dM(t)$ fica

$$dM(t) = Q_S(t)\,dS + Q_V(t)\,dV + rB(t)\,dt = M_S(t)\frac{dS}{S} + M_V(t)\frac{dV}{V} + rB(t)\,dt,$$

onde, como acima, quando escrevemos a equação

$$M(t) = M_S(t) + M_V(t) + B(t) = SQ_S(t) + VQ_V(t) + B(t),$$

aqui também estamos usando

$$Q_S(t) = \frac{M_S(t)}{S}$$

e

$$Q_V(t) = \frac{M_V(t)}{V}.$$

Substituindo

$$dS = \rho S dt + \sigma S dW$$

e

$$dV = \rho_V V dt + \sigma_V V dW$$

em

$$dM(t) = M_S(t)\frac{dS}{S} + M_V(t)\frac{dV}{V} + rB(t)\,dt,$$

podemos escrever esse incremento do valor da carteira como

$$dM(t) = M_S(t)\frac{\rho S dt + \sigma S dW}{S} + M_V(t)\frac{\rho_V V dt + \sigma_V V dW}{V} + rB(t)\,dt,$$

isto é,

$$dM(t) = \rho M_S(t)\,dt + \sigma M_S(t)\,dW + \rho_V M_V(t)\,dt + \sigma_V M_V(t)\,dW + rB(t)\,dt,$$

ou seja,

$$dM(t) = \rho M_S(t)\,dt + \rho_V M_V(t)\,dt + rB(t)\,dt + [\sigma M_S(t) + \sigma_V M_V(t)]\,dW.$$

Se impusermos que o termo estocástico dessa equação se anule sempre, a variação do valor da carteira passará a ser determinístico. Assim, impomos:

$$M_S(t)\,\sigma + M_V(t)\,\sigma_V = 0,$$

ou seja,

$$SQ_S(t)\,\sigma + VQ_V(t)\,\sigma_V = 0.$$

Usando a equação

$$\sigma_V = \frac{\sigma S}{V}\frac{\partial V}{\partial S},$$

vem

$$SQ_S(t)\,\sigma + VQ_V(t)\frac{\sigma S}{V}\frac{\partial V}{\partial S} = 0,$$

isto é,

$$\frac{Q_S(t)}{Q_V(t)} = -\frac{\partial V}{\partial S}.$$

Logo, nesse caso,

$$dM(t) = \rho M_S(t)\,dt + \rho_V M_V(t)\,dt + rB(t)\,dt.$$

Com essa condição sendo satisfeita, obtemos uma carteira que não é estocástica e que jamais requer qualquer investimento de capital, nem mesmo inicialmente. Assim, impomos:

$$dM(t) = 0$$

e, portanto, $M(t)$ é uma constante no tempo. Sendo assim, escolhamos não investir dinheiro algum desde o início, isto é,

$$M(t) = 0.$$

Com isso, segue de

$$M(t) = M_S(t) + M_V(t) + B(t)$$

que

$$B(t) = -M_S(t) - M_V(t).$$

Como

$$dM(t) = \rho M_S(t)\,dt + \rho_V M_V(t)\,dt + rB(t)\,dt,$$

segue

$$\rho M_S(t)\,dt + \rho_V M_V(t)\,dt + rB(t)\,dt = 0$$

e, assim,

$$\rho M_S(t)\,dt + \rho_V M_V(t)\,dt + r\left[-M_S(t) - M_V(t)\right]dt = 0.$$

Logo,

$$M_S(t)(\rho - r) + M_V(t)(\rho_V - r) = 0.$$

Essa igualdade fica

$$M_S(t)(\rho - r) + M_V(t)(\rho_V - r) = SQ_S(t)(\rho - r) + VQ_V(t)(\rho_V - r),$$

isto é,

$$M_S(t)(\rho - r) + M_V(t)(\rho_V - r) = -SQ_V(t)\frac{\partial V}{\partial S}(\rho - r) + VQ_V(t)(\rho_V - r) = 0,$$

onde usamos

$$\frac{Q_S(t)}{Q_V(t)} = -\frac{\partial V}{\partial S}.$$

Portanto,

$$S\frac{\partial V}{\partial S}(\rho - r) = V(\rho_V - r).$$

Substituindo o valor de ρ_V, dado por

$$\rho_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \rho S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right),$$

resulta na equação

$$S\frac{\partial V}{\partial S}(\rho - r) = \frac{\partial V}{\partial t} + \rho S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV,$$

ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rV \quad = \quad 0,$$

que é a equação de Black e Scholes.

Notemos que quando lançamos uma só opção e não mais mudamos essa posição em opções, temos

$$Q_V(t) \quad = \quad -1$$

e, da equação

$$\frac{Q_S(t)}{Q_V(t)} \quad = \quad -\frac{\partial V}{\partial S},$$

obtemos

$$Q_S(t) \quad = \quad \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Essa quantidade de ações é exatamente o que chamamos de Δ na postagem O princípio do hedging sem risco e a teoria de Black, Scholes e Merton:

$$\Delta \quad = \quad \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Como o valor da carteira é nulo sempre, da equação

$$M(t) \quad = \quad M_S(t)+M_V(t)+B(t)=SQ_S(t)+VQ_V(t)+B(t)$$

segue que

$$SQ_S(t)+VQ_V(t)+B(t) \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$-S\frac{\partial V}{\partial S}Q_V(t)+VQ_V(t)+B(t) \quad = \quad 0.$$

Lançando uma só opção, essa relação fornece

$$S\frac{\partial V}{\partial S}-V+B(t) \quad = \quad 0,$$

isto é,

$$V \quad = \quad S\frac{\partial V}{\partial S}+B(t),$$

ou seja,

$$V \quad = \quad S\Delta+B(t).$$

Assim, o preço da opção, em cada instante de tempo, pode ser replicado por uma carteira consistindo de Δ ações e uma quantidade de títulos $B(t)$.