O processo browniano geométrico revisitado: forma diferencial de Ito

Como menciono na postagem Introdução ao cálculo estocástico e o lema de Ito, o movimento browniano geométrico pode ser escrito na forma diferencial estocástica de Ito:

$$dS(t) = \rho S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW(t),$$

onde $S(t)$ é o preço da ação no instante t. Podemos fazer uma mudança de variável:

$$X(t) = \ln\left[\frac{S(t)}{S(t_0)}\right],$$

onde $t_0 < t$ é um instante de tempo onde o preço do ativo é conhecido, isto é,

$$S(t_0) = s_0.$$

Para aplicar o lema de Ito, calculemos:

$$\frac{\partial X}{\partial S} = \frac{1}{S},$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

e, portanto,

$$dX = dt\left[\rho S\frac{\partial X}{\partial S} + (\sigma S)^2\frac{\partial^2 X}{\partial S^2}\right] + \frac{1}{2}\rho S\frac{\partial X}{\partial S}dW,$$

isto é,

$$dX = dt\left\{\rho S(t)\frac{1}{S(t)} - \frac{\sigma^2}{2}[S(t)]^2\frac{1}{[S(t)]^2}\right\} + \sigma S(t)\frac{1}{S(t)}dW(t).$$

Logo,

$$dX(t) = \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t),$$

que é a equação diferencial estocástica para o movimento browniano. Assim, a distribuição para X fica dada em termos da variável real x como

$$u(x, t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}}\exp\left\{-\frac{\left[x - \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_0)\right]^2}{2\sigma^2(t - t_0)}\right\}.$$

Conforme t tende a t_0, a distribuição fica cada vez mais próxima de uma função delta centrada na origem. Esse comportamento faz sentido, pois X deve ser zero em t_0, já que

$$S(t_0) = s_0$$

e, portanto,

$$X(t_0) = \ln\left[\frac{S(t_0)}{S(t_0)}\right] = 0.$$

Normalmente, sabemos o preço hoje e desejamos a probabilidade de termos um determinado preço no futuro. Seja T o tempo futuro e t, o atual. Assim, a distribuição acima fica

$$u(x, T-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left\{-\frac{\left[x - \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.$$

Seguindo a postagem O movimento browniano geométrico, podemos escrever a densidade de probabilidade para o quociente $S(T)/S(t)$, se conhecermos $S(t)$, isto é,

$$g(s, T-t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln s - \ln S(t) - \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.$$

O valor esperado de $S(T)/S(t)$, sob a condição de termos o conhecimento exato de $S(t)$ no instante atual é denotado por

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right)$$

e é dado por

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \frac{s}{S(t)} g(s, T-t),$$

isto é,

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right) = \frac{1}{S(t)\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \exp\left\{-\frac{\left[\ln\frac{s}{S(t)} - \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.$$

Fazendo a substituição de variável

$$z = \ln\frac{s}{S(t)},$$

vem:

$$E\left(\frac{S(T)}{S(t)}\middle| S(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \exp\left\{z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.$$

Mas,

$$z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} = z - \frac{z^2 - 2z\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma^2(T-t)} - \frac{\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)},$$

isto é,

$$\begin{aligned} z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} &= -\frac{z^2 - 2z\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - 2z\sigma^2(T-t)}{2\sigma^2(T-t)} \\ &- \frac{\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} = -\frac{z^2 - 2z\rho(T-t) - z\sigma^2(T-t)}{2\sigma^2(T-t)} - \frac{\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)},$$

ou ainda,

$$z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} = -\frac{z^2 - 2z\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma^2(T-t)} - \frac{\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}.$$

Podemos simplificar ainda mais essa expressão:

$$\begin{aligned} z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} &= -\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} \\ &- \frac{\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\right](T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} = -\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2 - 2\rho\sigma^2(T-t)^2}{2\sigma^2(T-t)},$$

ou seja,

$$z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} = -\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} + \rho(T-t)$$

e, portanto, como

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\ \exp\left\{z - \frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\},$$

segue que

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\ \exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} + \rho(T-t)\right\},$$

isto é,

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right) = \frac{\exp\left[\rho(T-t)\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\ \exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.$$

Mas,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\ \exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} = 1$$

e, assim,

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right| S(t)\right) = \exp\left[\rho(T-t)\right].$$

Para o cálculo da variância, temos que calcular:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\left[\frac{s}{S(t)}\right]^2 g(s, T-t) &= \frac{1}{\left[S(t)\right]^2\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, s\exp\left\{-\frac{\left[\ln\frac{s}{S(t)}-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.\end{aligned}$$

Como anteriormente, fazendo a substituição de variável

$$z = \ln\frac{s}{S(t)},$$

obemos

$$dz = \frac{ds}{s},$$

isto é,

$$ds = sdz = S(t)\exp(z)\,dz.$$

Com isso,

$$sds \quad = \quad sS(t)\exp(z)\,dz = [S(t)]^2 \exp(2z)\,dz$$

e, assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \left[\frac{s}{S(t)}\right]^2 g(s, T-t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 (T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \exp\left\{2z - \frac{\left[z - \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)}\right\}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
2z - \frac{\left[z - \left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} \quad &= \quad 2z - \frac{z^2 - 2z\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma^2 (T-t)} - \frac{\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{z^2 - 2z\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - 4z\sigma^2 (T-t)}{2\sigma^2 (T-t)} - \frac{\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{z^2 - 2z\rho (T-t) - 3z\sigma^2 (T-t)}{2\sigma^2 (T-t)} - \frac{\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{z^2 - 2z\left(\rho + \frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{2\sigma^2 (T-t)} - \frac{\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{\left[z - \left(\rho + \frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} - \frac{\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - \left(\rho + \frac{3\sigma^2}{2}\right)^2\right](T-t)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{\left[z - \left(\rho + \frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} - \frac{\left[\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 - 4\rho\sigma^2 - \left(\frac{3\sigma^2}{2}\right)^2\right](T-t)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{\left[z - \left(\rho + \frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} + \frac{\left(4\rho\sigma^2 + 2\sigma^4\right)(T-t)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \\
&= \quad -\frac{\left[z - \left(\rho + \frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2 (T-t)} + \left(2\rho + \sigma^2\right)(T-t).
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\left[\frac{s}{S(t)}\right]^2 g(s,T-t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\exp\left\{2z-\frac{\left[z-\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\},$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\left[\frac{s}{S(t)}\right]^2 g(s,T-t) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\\ &\times\; \int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}+\left(2\rho+\sigma^2\right)(T-t)\right\},\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\left[\frac{s}{S(t)}\right]^2 g(s,T-t) \;&=\; \frac{\exp\left[\left(2\rho+\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\\ &\times\; \int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}.\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\exp\left\{-\frac{\left[z-\left(\rho+\frac{3\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \;=\; 1$$

e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\left[\frac{s}{S(t)}\right]^2 g(s,T-t) \;=\; \exp\left[\left(2\rho+\sigma^2\right)(T-t)\right].$$

Assim, a variância condicional, que podemos denotar por

$$\mathrm{var}\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right|S(t)\right),$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right|S(t)\right) \;&=\; \exp\left[\left(2\rho+\sigma^2\right)(T-t)\right]-\exp\left[2\rho(T-t)\right],\\ &=\; \exp\left[2\rho(T-t)\right]\left\{\exp\left[\sigma^2(T-t)\right]-1\right\}.\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathrm{var}\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right|S(t)\right) \;=\; \exp\left[2\rho(T-t)\right]\left\{\exp\left[\sigma^2(T-t)\right]-1\right\}.$$

Veja que os resultados

$$E\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right|S(t)\right) = \exp\left[\rho(T-t)\right]$$

e

$$\operatorname{var}\left(\left.\frac{S(T)}{S(t)}\right|S(t)\right) = \exp\left[2\rho(T-t)\right]\left\{\exp\left[\sigma^2(T-t)\right]-1\right\}$$

já foram obtidos anteriormente, na postagem O movimento browniano geométrico.