O princípio do "hedging" sem risco e a teoria de Black, Scholes e Merton

Em 1973, Black e Scholes fizeram várias hipóteses para deduzir sua equação para precificar opções de compra do tipo europeu:

1. as negociações ocorrem continuamente no tempo;
2. a taxa de juros livre de risco, r, é conhecida e constante no tempo;
3. as ações não pagam dividendos;
4. não há custos de transação, nem impostos;
5. as ações são perfeitamente divisíveis;
6. não há nenhum obstáculo para vendas a descoberto;
7. não há oportunidades de obter lucros sem risco.

O preço da ação, S, é suposto obedecer um movimento browniano geométrico:

$$dS = \rho S dt + \sigma S dW,$$

onde ρ e σ são parâmetros constantes. Consideremos uma carteira em que uma opção seja vendida e uma quantidade Δ de ações seja comprada. O valor dessa carteira será dado por

$$\Pi = -c + \Delta S,$$

onde c representa o preço da opção. Note que ΔS denota que a quantidade Δ é multiplicada pelo preço da ação S e não a variação do preço da ação. Usamos o lema de Ito para o preço da opção e obtemos

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt.$$

Assim, a variação do valor da carteira fica:

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dc + \Delta dS \\ &= -\left(\frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt \right) + \Delta \left(\rho S dt + \sigma S dW \right), \end{aligned}$$

isto é,

$$d\Pi = -\frac{\partial c}{\partial t} dt - \frac{\partial c}{\partial S} dS - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} dt + \rho S \Delta dt + \sigma S \Delta dW,$$

ou seja,

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \rho S \Delta \right) dt - \frac{\partial c}{\partial S} \left(\rho S dt + \sigma S dW \right) + \sigma S \Delta dW,$$

ou ainda,

$$d\Pi = \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \rho S\left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S}\right)\right]dt + \sigma S\left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S}\right)dW.$$

Veja que se escolhermos

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S},$$

então o valor da carteira não flutuará e teremos:

$$d\Pi = \left[-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + \rho S\left(\Delta - \frac{\partial c}{\partial S}\right)\right]dt = \left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right)dt.$$

Nesse caso, o rendimento da carteira será determinístico. Se esse rendimento for menor do que a taxa livre de risco r, sempre será possível vender um montante enorme da carteira a descoberto, comprar o equivalente em títulos que se valorizam à taxa r e realizar lucro sem risco. Caso o rendimento da carteira seja maior do que r, então será possível tomar uma quantidade enorme de dinheiro emprestado à taxa r e investir o montante equivalente na carteira, realizando lucro sem risco. Note que, em ambos os casos, o investidor não desembolsa dinheiro algum e obtém quanto lucro quiser, realizando um retorno infinito. Como, por hipótese, não há taxa de lucro livre de risco maior do que r, segue que a carteira deve render o mesmo que um investimento livre de risco, isto é,

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Logo,

$$-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = r\Pi = r\left(-c + \Delta S\right) = r\left(-c + \frac{\partial c}{\partial S}S\right).$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0,$$

que é a equação de Black e Scholes para o preço de opções de compra do tipo europeu. A condição de contorno aqui é que, no vencimento, o preço da opção será dado por

$$c\left(S, T\right) = \max\left(S - X, 0\right),$$

onde X é o chamado "strike price", ou o preço de exercício da opção de compra.