A fórmula de Feynman e Kac

Em uma postagem recente, mostrei como descrever o movimento browniano através da equação diferencial estocástica de Ito dada por

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

No entanto, em uma postagem mais antiga, introduzi o movimento browniano como sendo aquele cuja distribuição de probabilidade satisfaz a equação de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

onde $u(x,t)$ é a densidade de probabilidade de encontrar uma variável estocástica X com valor entre x e $x+dx$ no instante t, sendo que essa variável parte da origem, $x=0$, em $t=0$. Qual a conexão entre essas duas descrições? A fórmula de Feynman e Kac responde a essa pergunta. Suponhamos que

$$p(y,T) = f(y),$$

para todo y, em um instante T, posterior ao instante t, atual, onde $p(y,t)$ é a densidade de probabilidade de ter a variável estocástica Y com valor entre y e $y+dy$, no instante de tempo t. Veja que a notação aqui é bem importante: as variáveis estocásticas serão sempre escritas em letras maiúsculas, enquanto seus valores particulares serão escritos nas letras minúsculas correspondentes. Seja o valor atual de Y conhecido, isto é,

$$Y(t) = y.$$

Usando o lema de Ito, calculemos:

$$dp(Y,t) = dt\left[\frac{\partial p(Y,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial p(Y,t)}{\partial Y} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(Y,t)}{\partial Y^2}\right] + \sigma \frac{\partial p(Y,t)}{\partial Y} dW(t).$$

Note que aqui aparecem as variáveis estocásticas e não seus valores particulares. As variáveis estocásticas têm várias possibilidades para valores, de forma que uma equação diferencial estocástica, como essa acima, representa um conjunto grande de possibilidades; um conjunto tão grande como a coleção de possíveis valores de Y. Suponhamos que $p(y,t)$ satisfaça a equação

$$\frac{\partial p(y,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial p(y,t)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(y,t)}{\partial y^2} = 0,$$

para todo possível y. Então, consequentemente,

$$dp(Y,t) = \sigma \frac{\partial p(Y,t)}{\partial Y} dW(t).$$

Podemos integrar essa equação diferencial estocástica, entre os limites de integração t e T, e obter

$$p\left(Y\left(T\right),T\right) = p\left(y,t\right)+\sigma\int_{W(t)}^{W(T)}\frac{\partial p\left(Y\left(s\right),s\right)}{\partial Y\left(s\right)}dW\left(s\right).$$

Tomando o valor esperado, obtemos

$$\left\langle p\left(Y\left(T\right),T\right)\right\rangle = \left\langle p\left(y,t\right)\right\rangle+\sigma\left\langle\int_{W(t)}^{W(T)}\frac{\partial p\left(Y\left(s\right),s\right)}{\partial Y\left(s\right)}dW\left(s\right)\right\rangle.$$

Como o valor de Y é conhecido em t, segue que

$$\left\langle p\left(y,t\right)\right\rangle = p\left(y,t\right).$$

O valor esperado de $dW\left(t\right)$ é nulo em todos os instantes de tempo e $dW\left(t\right)$ é independente de $Y\left(s\right)$. Assim,

$$\left\langle\int_{W(t)}^{W(T)}\frac{\partial p\left(Y\left(s\right),s\right)}{\partial Y\left(s\right)}dW\left(s\right)\right\rangle = \int_{W(t)}^{W(T)}\left\langle\frac{\partial p\left(Y\left(s\right),s\right)}{\partial Y\left(s\right)}\right\rangle\left\langle dW\left(s\right)\right\rangle=0.$$

Logo, como

$$p\left(y,T\right) = f\left(y\right),$$

para todo y, segue que

$$p\left(y,t\right) = \left\langle p\left(Y\left(T\right),T\right)\right\rangle=\left\langle f\left(Y\left(T\right)\right)\right\rangle,$$

que é a fórmula de Feynman e Kac, conectando uma equação diferencial parcial e uma equação estocástica. Assim, uma vez que $p\left(y,t\right)$ satisfaça a equação

$$\frac{\partial p\left(y,t\right)}{\partial t}+\mu\frac{\partial p\left(y,t\right)}{\partial y}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(y,t\right)}{\partial y^2} = 0,$$

segue que $p\left(y,t\right)$ será o valor esperado de uma função da variável estocástica satisfazendo a equação

$$dY\left(t\right) = \mu dt+\sigma dW\left(t\right).$$

Resta agora explicar a diferença de sinal entre as equações

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}+\mu\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2} = 0,$$

que deduzi na postagem O preço da bebedeira ou a bebedeira do preço?, e a equação que estou usando no presente argumento, isto é,

$$\frac{\partial p\left(y,t\right)}{\partial t}+\mu\frac{\partial p\left(y,t\right)}{\partial y}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(y,t\right)}{\partial y^2} = 0.$$

Na equação original para o movimento browniano unidimensional,

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}+\mu\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{\sigma^{2}}{2}\frac{\partial^{2}u\left(x,t\right)}{\partial x^{2}} = 0,$$

a condição de contorno (ou, no caso, a condição inicial) é

$$u\left(x,0\right) = \delta\left(x\right),$$

enquanto que na equação

$$\frac{\partial p\left(y,t\right)}{\partial t}+\mu\frac{\partial p\left(y,t\right)}{\partial y}+\frac{\sigma^{2}}{2}\frac{\partial^{2}p\left(y,t\right)}{\partial y^{2}} = 0$$

a condição de contorno é

$$p\left(y,T\right) = f\left(y\right).$$

A diferença entre essas duas situações é que a equação para $u\left(x,t\right)$ dá uma evolução da distribuição de probabilidade a partir de um instante prévio até um instante posterior, enquanto que a equação para $p\left(y,t\right)$ dá uma evolução para tempos anteriores ao tempo T.

Alternativamente, suponhamos uma função do tempo que seja o valor esperado de uma função de $X\left(t\right)$ que satisfaça a equação diferencial estocástica

$$dX\left(t\right) = \mu dt+\sigma dW\left(t\right).$$

Agora vou deduzir a equação de Fokker e Planck. Seja $u\left(x,t\right)$ a distribuição da variável X e seja o valor esperado que procuramos dado por

$$A\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\,u\left(x,t\right)f\left(x\right).$$

Assim,

$$dA\left(t\right) = A\left(t+dt\right)-A\left(t\right),$$

isto é,

$$dA\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\,u\left(x,t+dt\right)f\left(x\right)-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,u\left(x,t\right)f\left(x\right),$$

ou seja,

$$dA\left(t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\left[u\left(x,t+dt\right)-u\left(x,t\right)\right]f\left(x\right),$$

ou ainda,

$$dA\left(t\right) = dt\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}f\left(x\right),$$

onde usamos a relação

$$du = u(x,t+dt) - u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt.$$

Outra forma de obter $dA(t)$ é através da média dos incrementos de $f(X(t))$ obtidos pelo lema de Ito:

$$df(X) = dt\left[\mu \frac{\partial f(X)}{\partial X} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2}\right] + \sigma \frac{\partial f(X)}{\partial X} dW(t),$$

onde, para simplificar a notação,

$$X = X(t).$$

Assim, quando, no instante t, ocorrer o valor

$$X(t) = x,$$

o incremento de f a partir daí, no intervalo de tempo dt, será dado por

$$df(x) = f(x + dX(t)) - f(x) = df(X(t)),$$

isto é,

$$df(x) = dt\left[\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right] + \sigma \frac{\partial f(x)}{\partial x} dW(t),$$

já que, nesse caso,

$$X = X(t) = x.$$

Esse resultado pode ser interpretado como representando os possíveis incrementos da função f, a partir de cada x, ao longo das trajetórias estocásticas passando por x, durante um intervalo de tempo dt. O valor esperado de um tal incremento de f, a partir de cada x, é, portanto,

$$\langle df(x) \rangle = dt\left[\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right],$$

já que

$$\langle dW(t) \rangle = 0.$$

Em cada x, o valor esperado de df é dado acima. Para sabermos o valor esperado do incremento de A, irrespectivamente de x, podemos escrever

$$dA(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t) \langle df(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, dt \left[\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right],$$

já que a probabilidade para X estar no intervalo $[x, x+dx]$ é dada por $dx\,u(x,t)$. Mas essa equação deve ser igualada à equação que já apareceu acima, isto é,

$$dA(t) = dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} f(x).$$

Portanto,

$$dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, dt \left[\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right].$$

Usando integração por partes, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\partial u(x,t) f(x)}{\partial x} - f(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right],$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

pois sempre suporemos que $u(x,t)$ se anule para valores infinitos de x. Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, u(x,t)\, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

onde também sempre suporemos que

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$$

para valores infinitos de x. Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \left[-\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right],$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] f(x) = 0.$$

Como, desde o início da presente postagem, temos suposto que a função f seja arbitrária, obtemos

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

que é a equação de Fokker e Planck da postagem original sobre movimento browniano em uma dimensão.