Introdução ao cálculo estocástico e o lema de Ito

Na postagem O preço da bebedeira ou a bebedeira do preço? argumentei que a densidade de probabilidade para o movimento browniano é dada por

$$u(x,t) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}.$$

No limite em que t vai a zero por valores positivos, essa expressão tende à função delta de Dirac e descreve, portanto, a densidade de probabilidade de encontrar a partícula browniana entre x e $x+dx$ no instante $t>0$, tendo partido de $x=0$ em $t=0$. Agora tomemos $\mu=0$ e $\sigma=1$. Assim, a distribuição resultante,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$

para qualquer x real, é conhecida como a distribuição browniana padrão, ou a distribuição do processo de Wiener padrão.

A distribuição

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

descreve a densidade de probabilidade para cada instante de tempo de uma variável estocástica que podemos denotar por $W(t)$ (por causa de Wiener). Podemos considerar agora a variável estocástica dada pelo incremento

$$\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t).$$

Como cada incremento é, por hipótese, independente de outro incremento e é distribuído normalmente, sua distribuição fica

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\exp\left(-\frac{z^2}{2\Delta t}\right).$$

Assim, o resultado só depende das variações z e Δt, pois o movimento browniano é markoviano.

Consideremos agora a distribuição normal da variável estocástica S:

$$\mathcal{N}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{s^2}{2}\right].$$

Para manter a normalização igual à unidade, a distribuição da variável estocástica

$$Z = S\sqrt{\Delta t}$$

é dada por

$$P\left(z\right)dz = \mathcal{N}\left(\frac{z}{\sqrt{\Delta t}}\right)d\left(\frac{z}{\sqrt{\Delta t}}\right),$$

ou seja,

$$P\left(z\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\mathcal{N}\left(\frac{z}{\sqrt{\Delta t}}\right).$$

Logo, podemos escrever:

$$\Delta W\left(t\right) = S\sqrt{\Delta t}$$

e, no limite infinitesimal,

$$dW\left(t\right) = S\sqrt{dt}.$$

Porque S é distribuída normalmente, com média nula, seu valor esperado é zero. Sua variância é igual à unidade:

$$\mathrm{var}\left(S\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, s^2\mathcal{N}\left(s\right) = 1.$$

Logo,

$$\left\langle dW\left(t\right)\right\rangle = 0$$

e

$$\mathrm{var}\left[dW\left(t\right)\right] = dt.$$

Calculemos:

$$\mathrm{var}\left\{\left[dW\left(t\right)\right]^2\right\} = \left(dt\right)^2\mathrm{var}\left(S^2\right) = \left(dt\right)^2\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, s^4\mathcal{N}\left(s\right) - \left[\mathrm{var}\left(S\right)\right]^2\right\}$$

e, portanto,

$$\mathrm{var}\left\{\left[dW\left(t\right)\right]^2\right\} = \left(dt\right)^2\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, s^4\mathcal{N}\left(s\right) - 1\right\}.$$

Para completar esse cálculo, consideremos a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, s^4\exp\left[-\alpha s^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\exp\left[-\alpha s^2\right] = \sqrt{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\alpha^{-1/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}}.$$

Tomando

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, s^4 \exp\left[-\frac{s^2}{2}\right] = 2^{5/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = 3\sqrt{2\pi}.$$

Logo,

$$\text{var}\left\{[dW(t)]^2\right\} = (3-1)(dt)^2 = 2(dt)^2.$$

Temos também:

$$\langle dt dW(t)\rangle = 0$$

e, usando

$$\text{var}[dW(t)] = dt,$$

calculamos que

$$\text{var}[dt dW(t)] = (dt)^2 dt = (dt)^3.$$

Com esses resultados, consideremos incrementos dt muito pequenos e, portanto, desprezemos

$$(dt)^2$$

e ordens superiores. Podemos, então, dizer que, sendo assim, os termos

$$[dW(t)]^2 \text{ e } dt dW(t)$$

não são estocásticos, já que suas variâncias são desprezíveis. Consequentemente, as igualdades

$$[dW(t)]^2 = dt$$

e

$$dt dW(t) = 0$$

não apenas são satisfeitas em valor esperado, mas exatamente, já que não flutuam, pois suas variâncias são desprezíveis.

A partir de agora, podemos descrever o movimento browniano como sendo dado por esta equação diferencial estocástica:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

O valor esperado dessa expressão dá

$$\langle dX(t)\rangle = \langle \mu dt + \sigma dW(t)\rangle = \mu\langle dt\rangle + \sigma\langle dW(t)\rangle = \mu dt + 0 = \mu dt,$$

onde usamos que

$$\langle dW(t)\rangle = 0$$

Também é notório o cálculo seguinte:

$$[dX(t)]^2 = [\mu dt + \sigma dW(t)]^2 = \mu^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma dt dW(t) + \sigma^2 [dW(t)]^2 = \sigma^2 dt,$$

onde usamos

$$[dW(t)]^2 = dt$$

e

$$dt dW(t) = 0,$$

além de tomar o quadrado de dt como desprezível. Embora $dX(t)$ seja uma variável estocástica, $[dX(t)]^2$ é uma variável determinística.

O lema de Ito

Dada uma variável estocástica $X(t)$ satisfazendo

$$dX(t) = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW(t),$$

onde, por clareza,

$$X = X(t),$$

então, para uma função não estocástica $u(y,t)$, para y real, temos:

$$du(X,t) = \left\{\frac{\partial u}{\partial t} + a(X,t)\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}[b(X,t)]^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right\} dt + b(X,t)\frac{\partial u}{\partial X} dW(t),$$

onde

$$u = u(X,t).$$

Prova:

Façamos uma expansão da função $u(X+dX, t+dt)$ em potências de dt, até segunda ordem em $dW(t)$:

$$u(X+dX, t+dt) = u(X,t) + dt\frac{\partial u}{\partial t} + dX\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}(dX)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}.$$

Usando $[dX(t)]^2 = \sigma^2 dt$ e

$$dX(t) = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW(t),$$

obtemos

$$du(X,t) = u(X+dX, t+dt) - u(X,t),$$

isto é,

$$du(X,t) = dt\frac{\partial u}{\partial t} + [a(X,t)\,dt + b(X,t)\,dW(t)]\,\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}[b(X,t)]^2\,dt\frac{\partial^2 u}{\partial X^2},$$

ou seja,

$$du(X,t) = dt\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + a(X,t)\,\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}[b(X,t)]^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\right\} + b(X,t)\,\frac{\partial u}{\partial X}dW(t),$$

quod erat demonstrandum.■

Como exemplo, considere o movimento browniano geométrico, isto é,

$$Y(t) = \exp[X(t)],$$

com $X(t)$ satisfazendo $dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$. Usando o lema de Ito, facilmente obtemos

$$dY(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)Y(t)\,dt + \sigma Y(t)\,dW(t).$$