O teorema central do limite de distribuições probabilísticas

Há um teorema de central importância sobre o limite de distribuições probabilísticas: é o chamado teorema central do limite. Esse teorema é realmente curioso, pois estabelece que se N variáveis reais aleatórias x_i, com $i = 1, 2, \ldots, N$, forem identicamente distribuídas na reta real, com densidade de probabilidade dada por $p(x_i)$, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, e se a densidade p for arbitrária, mas tal que todos os valores médios das potências de x_i sejam finitos, então a densidade de probabilidade para a variável soma, isto é,

$$X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

no limite em que N for muito grande, será gaussiana! :shock: Isso mesmo: independentemente da distribuição p! :shock:

Como exemplo análogo do caso discreto, pensemos em uma série de N lançamentos de um dado. Cada lançamento pode resultar em uma de seis possíveis faces, com a probabilidade de ocorrência igual a um sexto. Assim, a ocorrência de cada um dos números de face de 1 a 6 é igualmente provável em cada lançamento. Depois de N lançamentos idênticos e independentes, podemos perguntar qual a média do número de face. Por exemplo, em três lançamentos, obtemos os números de face: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ e $x_3 = 4$ e a média é dada por

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}(1+5+4) \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Podemos repetir esses três lançamentos muitas e muitas vezes e estimar a distribuição de probabilidades de que um valor X ocorra para a média dos valores de face. Essa distribuição, para três lançamentos, não é gaussiana. Mas se fizermos esse mesmo experimento com o número de lançamentos N cada vez maior, a distribuição de ocorrência de X será gaussiana, segundo o teorema central do limite. A seguir, segue uma prova do teorema. :cool:

Seja $P(X)$ a densidade de probabilidade de que a variável X, definida pela soma das variáveis aleatórias x_i, isto é,

$$X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

assuma um valor entre X e $X + dX$. Seja $Q(K)$ a transformada de Fourier de $P(X)$:

$$Q(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX\, P(X) \exp(iKX).$$

A exponencial pode ser escrita como uma série infinita:

$$\exp\left(iKX\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}K^{n}}{n!}X^{n}.$$

Logo,

$$Q\left(K\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}K^{n}}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}dX\,P\left(X\right)X^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n}K^{n}}{n!}\left\langle X^{n}\right\rangle,$$

onde denotamos o valor esperado de X^{n} por $\left\langle X^{n}\right\rangle$:

$$\left\langle X^{n}\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}dX\,P\left(X\right)X^{n}.$$

Para $N=2$, por exemplo, temos a probabilidade $p\left(x_1\right)dx_1$ de que a variável estocástica x_1 assuma um valor entre x_1 e x_1+dx_1. Analogamente, temos a probabilidade $p\left(x_2\right)dx_2$ de que a variável estocástica x_2 assuma um valor entre x_2 e x_2+dx_2. De todos os valores independentes que x_1 e x_2 possam assumir, qual a probabilidade de que assumam valores tais que $\left(x_1+x_2\right)/2$ tenha um valor entre X e $X+dX$? A resposta para essa questão é simples: escrevemos

$$x_2 = 2X-x_1$$

e, para cada valor de X e x_1 a probabilidade é

$$p\left(x_1\right)p\left(x_2\right)dx_1dx_2.$$

Como agora queremos que as variáveis independentes sejam X e x_1, utilizamos a relação

$$dx_1dx_2 = \left|\begin{array}{cc}\frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X}\\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X}\end{array}\right|dx_1dX = \left|\begin{array}{cc}1 & 0\\ -1 & 2\end{array}\right|dx_1dX = 2dx_1dX$$

e a probabilidade procurada pode ser escrita como

$$P\left(X\right)dX = 2\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(x_1\right)p\left(2X-x_1\right)dx_1dX,$$

já que qualquer valor de x_1 poderá ocorrer e ainda assim termos o mesmo valor para X. Portanto, a densidade de probabilidade é dada por

$$P\left(X\right) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(x_1\right)p\left(2X-x_1\right)dx_1,$$

que também pode ser expressa como

$$P\left(X\right) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p\left(x_1\right)p\left(x_2\right)\delta\left[x_2-\left(2X-x_1\right)\right]dx_1dx_2,$$

onde δ é a chamada "função delta de Dirac". Se utilizarmos as propriedades:

$$\delta\left(ay\right) = \frac{1}{|a|}\delta\left(y\right)$$

e

$$\delta\left(y\right) = \delta\left(-y\right),$$

obteremos

$$P\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p\left(x_1\right)p\left(x_2\right)\delta\left(X-\frac{x_1+x_2}{2}\right)dx_1dx_2.$$

Para $N > 2$, podemos facilmente generalizar a fórmula acima:

$$P\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} p\left(x_1\right)p\left(x_2\right)\ldots p\left(x_N\right)\delta\left(X-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_i\right)dx_1dx_2\ldots dx_N.$$

Usando esse resultado na expressão do valor esperado de X^n encontramos

$$\begin{aligned}\left\langle X^n\right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX\,P\left(X\right)X^n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX\,X^n\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} p\left(x_1\right)\ldots p\left(x_N\right)\delta\left(X-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_i\right)dx_1\ldots dx_N \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ldots dx_N p\left(x_1\right)\ldots p\left(x_N\right)\int_{-\infty}^{+\infty} dX\,X^n\delta\left(X-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_i\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\left\langle X^n\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ldots dx_N p\left(x_1\right)\ldots p\left(x_N\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_i\right)^n.$$

Utilizando essa igualdade na equação

$$Q\left(K\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^nK^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} dX\,P\left(X\right)X^n$$

fornece

$$\begin{aligned}Q\left(K\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^nK^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ldots dx_N p\left(x_1\right)\ldots p\left(x_N\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_i\right)^n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1\ldots dx_N p\left(x_1\right)\ldots p\left(x_N\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^nK^n}{n!}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_i\right)^n.\end{aligned}$$

Reconhecemos a série infinita acima como uma exponencial:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n K^n}{n!} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_i \right)^n = \exp\left(\frac{iK}{N} \sum_{n=1}^{N} x_i \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} Q(K) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_N p(x_1) \dots p(x_N) \exp\left(\frac{iK}{N} \sum_{n=1}^{N} x_i \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 p(x_1) \exp\left(\frac{iK}{N} x_1 \right) \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N p(x_N) \exp\left(\frac{iK}{N} x_N \right) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \exp\left(\frac{iK}{N} x \right) \right]^N. \end{aligned}$$

Como estamos supondo que N é muito grande, podemos utilizar a expansão:

$$\exp\left(\frac{iK}{N} x \right) = 1 + i\frac{K}{N} x - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2 x^2 + \cdots$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \exp\left(\frac{iK}{N} x \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \left[1 + i\frac{K}{N} x - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2 x^2 + \cdots \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) + i\frac{K}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) x \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) x^2 + \cdots, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \exp\left(\frac{iK}{N} x \right) = 1 + i\frac{K}{N} \langle x \rangle - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{N} \right)^2 \langle x^2 \rangle + \cdots,$$

onde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) = 1,$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) x$$

e

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) x^2.$$

Com isso, a equação

$$Q(K) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x) \exp\left(\frac{iK}{N}x\right)\right]^N$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Q(K) &= \left[1 + i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle + \cdots\right]^N \\ &= \exp\left\{N\ln\left[1 + i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle + \cdots\right]\right\}. \end{aligned}$$

Para N muito grande, podemos expandir o logaritmo:

$$\begin{aligned} \ln\left[1 + i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle + \cdots\right] &= \left[i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle + \cdots\right] \\ &- \frac{1}{2}\left[i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle + \cdots\right]^2 + \cdots \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \ln\left[1 + i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle + \cdots\right] &= i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\left\langle x^2\right\rangle - \frac{1}{2}\left(i\frac{K}{N}\langle x\rangle\right)^2 + \cdots \\ &= i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\left(\left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2\right) + \cdots \\ &= i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \operatorname{var}(x) + \cdots, \end{aligned}$$

onde reconhecemos a variância de x, ou seja,

$$\operatorname{var}(x) = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2 .$$

Então,

$$\begin{aligned} Q(K) &= \exp\left\{N\left[i\frac{K}{N}\langle x\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \operatorname{var}(x) + \cdots\right]\right\} \\ &= \exp\left[iK\langle x\rangle - \frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\operatorname{var}(x) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Essa é a trasformada de Fourier da densidade de probabilidade $P(X)$ que procuramos. Podemos inverter a equação

$$Q(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} dX\, P(X) \exp(iKX)$$

e obter

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\, Q(K)\exp(-iKX) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dK \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dY\, P(Y)\exp(iKY)\right]\exp(-iKX)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dY\, P(Y)\int_{-\infty}^{+\infty} dK \exp\left[iK(Y-X)\right].\end{aligned}$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dK \exp\left[iK(Y-X)\right] = 2\pi\delta(Y-X),$$

concluímos que podemos obter $P(X)$ a partir de $Q(K)$:

$$P(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\, Q(K)\exp(-iKX).$$

Então, da equação

$$Q(K) = \exp\left[iK\langle x\rangle - \frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\operatorname{var}(x) + \cdots\right]$$

segue que

$$\begin{aligned}P(X) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\ \exp\left[-iK(X-\langle x\rangle) - \frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\operatorname{var}(x) + \cdots\right]\\ &\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\ \exp\left[-iK(X-\langle x\rangle) - \frac{1}{2}\frac{K^2}{N}\operatorname{var}(x)\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{var}(x)}{N}\left[K^2 + 2i\frac{NK}{\operatorname{var}(x)}(X-\langle x\rangle)\right]\right\}\end{aligned}$$

e, completanto o quadrado no argumento da exponencial no integrando, vem:

$$\begin{aligned}P(X) \approx\ & \frac{1}{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{var}(x)}{N}\left(\frac{iN(X-\langle x\rangle)}{\operatorname{var}(x)}\right)^2\right\}\\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dK\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{var}(x)}{N}\left[K^2 + 2i\frac{NK}{\operatorname{var}(x)}(X-\langle x\rangle) + \left(\frac{iN(X-\langle x\rangle)}{\operatorname{var}(x)}\right)^2\right]\right\},\end{aligned}$$

isto é,

$$P(X) \approx \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{N(X-\langle x\rangle)^2}{\operatorname{var}(x)}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} dK\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{var}(x)}{N}\left(K + \frac{iN(X-\langle x\rangle)}{\operatorname{var}(x)}\right)^2\right\}.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dK\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{var}(x)}{N}\left(K + \frac{iN(X-\langle x\rangle)}{\operatorname{var}(x)}\right)^2\right\} = \sqrt{\frac{2\pi N}{\operatorname{var}(x)}},$$

escrevemos

$$P\left(X\right) \approx \sqrt{\frac{N}{2\pi \mathrm{var}\left(x\right)}}\exp\left\{-\frac{N}{2\mathrm{var}\left(x\right)}\left(X-\left\langle x\right\rangle\right)^2\right\}.$$

O valor esperado de X é dado por

$$\left\langle X\right\rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left\langle x_n\right\rangle = \left\langle x\right\rangle,$$

já que as variáveis x_n são todas independentes e identicamente distribuídas. A variância de X é dada por

$$\mathrm{var}\left(X\right) = \left\langle X^2\right\rangle - \left\langle X\right\rangle^2 = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} x_m \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\right\rangle - \left\langle x\right\rangle^2,$$

isto é,

$$\mathrm{var}\left(X\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left\langle x_m x_n\right\rangle - \left\langle x\right\rangle^2.$$

Mas, como as variáveis x_m são todas independentes e identicamente distribuídas, temos:

$$\left\langle x_m x_n\right\rangle = \delta_{mn}\left\langle x^2\right\rangle + \left(1-\delta_{mn}\right)\left\langle x\right\rangle^2,$$

onde δ_{mn} é a função de dois inteiros, m e n, chamada "delta de Kronecker". Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(X\right) &= \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\delta_{mn}\left\langle x^2\right\rangle + \left(1-\delta_{mn}\right)\left\langle x\right\rangle^2\right] - \left\langle x\right\rangle^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\left\langle x^2\right\rangle + \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left(1-\delta_{mn}\right)\left\langle x\right\rangle^2 - \left\langle x\right\rangle^2 \\
&= \frac{1}{N}\left\langle x^2\right\rangle + \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left\langle x\right\rangle^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\delta_{mn}\left\langle x\right\rangle^2 - \left\langle x\right\rangle^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathrm{var}\left(X\right) = \frac{1}{N}\left\langle x^2\right\rangle + \left\langle x\right\rangle^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\left\langle x\right\rangle^2 - \left\langle x\right\rangle^2 = \frac{1}{N}\left\langle x^2\right\rangle - \frac{1}{N}\left\langle x\right\rangle^2,$$

ou seja,

$$\mathrm{var}\left(X\right) = \frac{\mathrm{var}\left(x\right)}{N}.$$

Podemos, então, escrever a densidade de probabilidade para a variável X, quando N é muito grande, como uma gaussiana:

$$P(X) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{var}(X)}} \exp\left\{-\frac{(X - \langle X \rangle)^2}{2\mathrm{var}(X)}\right\}.$$

Acho isso fantástico! :grin: Você não acha? :cool: