Distribuições estáveis de probabilidades

Imagine uma pessoa com suas duas pernas perfeitamente simétricas. Não só isso: imagine que essa pessoa tenha também toda a musculatura dos membros inferiores exatamente simétrica, isto é, o que o lado direito tem, o lado esquerdo tem igualzinho! :smile: Vamos batizar essa pessoa de A. Pessoa. O Sr. Pessoa tem, portanto, da cintura para baixo, perfeita simetria de reflexão por um plano que imaginariamente o divide em um lado esquerdo e um lado direito. Vamos supor que esse moço tenha o resto do corpo também simétrico o suficiente para que qualquer pequena diferença, da cintura para cima, não modifique a simetria em sua habilidade de mover as pernas. (Afinal, o Sr. Pessoa pode usar um relógio de pulso ou mesmo pentear os cabelos de forma assimétrica. :smile:) Nesse caso, cada passo que dá tem uma probabilidade de ter o comprimento x, seja com a perna esquerda ou com a direita. Cada passo tem um comprimento aleatório, pois ninguém repete exatamente o mesmo passo. Por exemplo, o comprimento do passo depende do terreno e de diversas variáveis fisiológicas. No entanto, os movimentos de cada uma das pernas, sendo igualmente produzidos, implicam mesmas probabilidades para os comprimentos de passos esquerdos e direitos. Seja x_1 o comprimento do primeiro passo com a perna direita e seja x_2 o comprimento do passo seguinte, com a perna esquerda. Depois de dois passos, a distância que o Sr. Pessoa percorre é a soma dessas duas variáveis estocásticas: $X = x_1 + x_2$. As distribuições de probabilidades para os passos direito e esquerdo são dadas pela mesma função: $p\left(x\right)$. Sabendo isso, como fica a distribuição de probabilidades para que, após dois passos, um direito e um esquerdo, o Sr. Pessoa percorra X? :???: As considerações seguintes intencionam responder essa pergunta e introduzir o conceito de distribuições estáveis de probabilidades. :cool:

Consideremos uma distribuição lorentziana:

$$p\left(x\right) \quad = \quad \mathcal{N}\frac{1}{\gamma^2 + x^2},$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização e γ é uma constante real positiva. Calculemos $\mathcal{N}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\mathcal{N}\frac{1}{\gamma^2 + x^2} \quad = \quad 1,$$

ou seja,

$$\mathcal{N} \quad = \quad \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{\gamma^2+x^2}},$$

pois uma distribuição de probabilidades, quando integrada sobre todo o espaço amostral, deve ser igual à unidade. A integral no denominador pode ser calculada se simplificarmos seu integrando:

$$\frac{1}{\gamma^2 + x^2} \quad = \quad \frac{1}{\left(x + i\gamma\right)\left(x - i\gamma\right)} = \frac{1}{2i\gamma\left(x - i\gamma\right)} - \frac{1}{2i\gamma\left(x + i\gamma\right)}.$$

Não acredita? Basta calcular

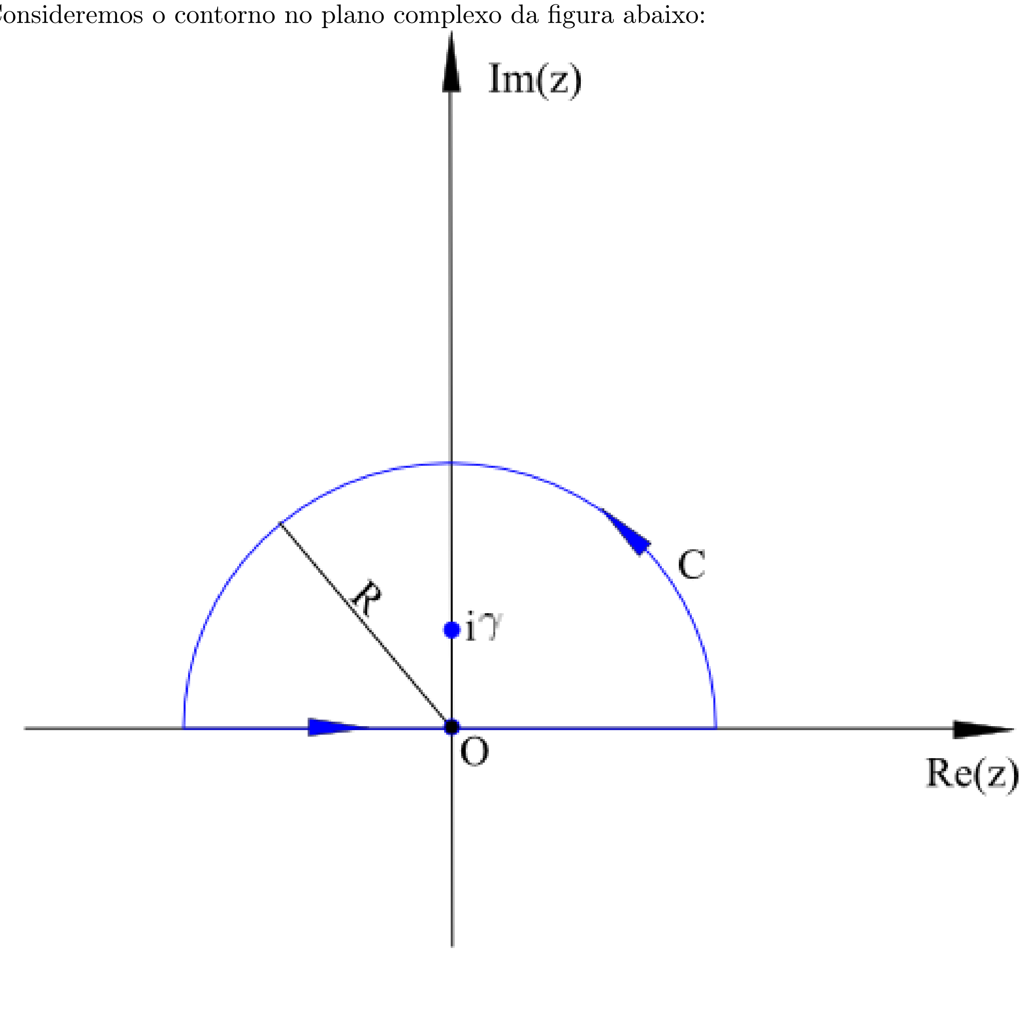
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2i\gamma\,(x-i\gamma)}-\frac{1}{2i\gamma\,(x+i\gamma)} &= \frac{(x+i\gamma)-(x-i\gamma)}{2i\gamma\,(x-i\gamma)\,(x+i\gamma)}=\frac{2i\gamma}{2i\gamma\,(x-i\gamma)\,(x+i\gamma)}\\
&= \frac{1}{(x-i\gamma)\,(x+i\gamma)}=\frac{1}{\gamma^2+x^2}.
\end{aligned}
$$

Viu? :cool:

Agora, podemos utilizar o seguinte truque:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\gamma^2+x^2} &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{\gamma^2+x^2}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\left[\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma\,(x-i\gamma)}-\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma\,(x+i\gamma)}\right]\\
&= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma\,(x-i\gamma)}-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma\,(x+i\gamma)}\right].
\end{aligned}
$$

Consideremos o contorno no plano complexo da figura abaixo:



É fácil provar que vale o limite:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C dz\,\frac{\exp(i\varepsilon z)}{(z-i\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{(x-i\gamma)},\ \text{para } \varepsilon,\gamma>0.$$

Usando o teorema dos resíduos, vem:

$$\oint_C dz\,\frac{\exp(i\varepsilon z)}{(z-i\gamma)} = 2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma).$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{(x-i\gamma)} = \lim_{R\to\infty}\oint_C dz\,\frac{\exp(i\varepsilon z)}{(z-i\gamma)} = \lim_{R\to\infty}\left[2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma)\right] = 2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma).$$

Também temos (Um bom exercício! :grin:):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(i\varepsilon x)\,dx}{(x+i\gamma)} = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\gamma^2+x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma(x-i\gamma)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\exp(i\varepsilon x)}{2i\gamma(x+i\gamma)}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2\pi i\exp(-\varepsilon\gamma)}{2i\gamma}-0\right],$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\gamma^2+x^2} = \frac{\pi}{\gamma}$$

e, portanto,

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{1}{\gamma^2+x^2}} = \frac{\gamma}{\pi}.$$

A densidade de probabilidade que vamos considerar, normalizada, fica, portanto,

$$p(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2+x^2}.$$

Sigamos agora um procedimento análogo ao utilizado na postagem sobre o teorema central do limite de distribuições probabilísticas: consideremos a variável

$$X = x_1+x_2$$

e calculemos a densidade de probabilidade para X, quando x_1 e x_2 são variáveis estocásticas independentes, identicamente distribuídas segundo a distribuição lorentziana, isto é,

$$p(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2+x^2}.$$

Assim, como na postagem sobre o teorema central do limite de distribuições probabilísticas, podemos escrever

$$P(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, p(x_1) \, p(x_2) \, \delta(X - x_1 - x_2) \, .$$

É mais simples considerarmos a transformada de Fourier de $P(X)$, também chamada de função característica da densidade de probabilidade $P(X)$:

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dX \, P(X) \exp(iqX) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dX \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, p(x_1) \, p(x_2) \, \delta(X - x_1 - x_2) \right] \exp(iqX) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, p(x_1) \, p(x_2) \int_{-\infty}^{+\infty} dX \, \exp(iqX) \, \delta(X - x_1 - x_2) \, ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, p(x_1) \, p(x_2) \exp[iq(x_1 + x_2)] \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \, p(x_1) \exp(iqx_1) \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \, p(x_2) \exp(iqx_2) \right]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Phi(q) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p(x) \exp(iqx) \right]^2 .$$

Calculemos a transformada de Fourier, ou a função característica, da lorentziana

$$p(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2} ,$$

isto é,

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p(x) \exp(iqx) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(iqx)}{\gamma^2 + x^2} .$$

Aqui devemos considerar dois casos: $q > 0$ e $q < 0$. No primeiro caso, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(iqx)}{\gamma^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(iqx)}{2i\gamma(x - i\gamma)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(iqx)}{2i\gamma(x + i\gamma)} = \frac{\pi \exp(-q\gamma)}{\gamma} .$$

No segundo caso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\exp(iqx)}{\gamma^2 + x^2} = \frac{\pi \exp(q\gamma)}{\gamma} .$$

Em todo caso, portanto,

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) \exp(iqx) = \exp(-\gamma |q|) .$$

Logo,

$$\Phi(q) = [\varphi(q)]^2 = \exp(-2\gamma |q|) .$$

Para obtermos a distribuição da variável X, basta calcularmos a transformada de Fourier inversa:

$$P(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \Phi(q) \exp(-iqX) ,$$

isto é,

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp(-2\gamma |q| - iqX) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} dq \exp(2\gamma q - iqX) + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} dq \exp(-2\gamma q - iqX) , \end{aligned}$$

ou seja,

$$P(X) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2\gamma - iX} + \frac{1}{2\gamma + iX} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\gamma + iX + 2\gamma - iX}{(2\gamma - iX)(2\gamma + iX)}$$

e, portanto,

$$P(X) = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{(2\gamma)^2 + X^2} .$$

Logo, a densidade de probabilidade para a variável X é também lorentziana, com apenas uma mudança de escala, isto é,

$$\gamma \to 2\gamma .$$

Dizemos, nesse caso, que a densidade de probabilidade lorentziana é uma distribuição estável, pois sua convolução resulta na mesma distribuição, com apenas uma mudança de escala. :cool:

A distribuição gaussiana também é estável. Para verificarmos isso, tomemos

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right]$$

e consideremos a distribuição da variável

$$X = x_1 + x_2 .$$

A função característica correspondente é dada por

$$\Phi\left(q\right) = \left[\varphi\left(q\right)\right]^{2} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p\left(x\right)\exp\left(iqx\right)\right]^{2}.$$

Mas,

$$\varphi\left(q\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p\left(x\right)\exp\left(iqx\right)$$

isto é,

$$\begin{aligned}\varphi\left(q\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}+iqx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x^{2}-2i\sigma^{2}qx\right)\right] \\ &= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^{2}q^{2}\right]}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x-i\sigma^{2}q\right)^{2}\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi\left(q\right) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^{2}q^{2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^{2}}}\sqrt{2\pi\sigma^{2}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^{2}q^{2}\right)$$

e, portanto,

$$\Phi\left(q\right) = \left[\varphi\left(q\right)\right]^{2} = \exp\left(-\sigma^{2}q^{2}\right).$$

Tomando a transformada de Fourier inversa, obtemos a densidade de probabilidade para a variável X :

$$\begin{aligned}P\left(X\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\Phi\left(q\right)\exp\left(-iqX\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\exp\left(-\sigma^{2}q^{2}-iqX\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\exp\left[-\sigma^{2}\left(q^{2}-\frac{iq}{\sigma^{2}}X\right)\right],\end{aligned}$$

isto é,

$$P\left(X\right) = \frac{\exp\left[\sigma^{2}\left(\frac{iX}{2\sigma^{2}}\right)^{2}\right]}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\exp\left[-\sigma^{2}\left(q-\frac{iX}{2\sigma^{2}}\right)^{2}\right] = \frac{\exp\left(-\frac{X^{2}}{4\sigma^{2}}\right)}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma^{2}}}$$

e, assim,

$$P\left(X\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^{2}}}\exp\left(-\frac{X^{2}}{4\sigma^{2}}\right),$$

que também é uma gaussiana, porém com uma escala diferente, ou seja,

$$\sigma^{2} \quad\rightarrow\quad 2\sigma^{2}.$$

Logo, a distribuição gaussiana também é estável. :cool:

Depois de estudar esses dois exemplos, podemos perguntar: quais são as distribuições estáveis? :???: Existem outras? :???: As respostas a essas questões foram dadas por Paul Pierre Lévy (há fotos) e Aleksandr Khinchin nas décadas de 1920 e 1930. Segundo o livro de Mantegna e Stanley, eles descobriram que a forma mais geral de uma função característica de um processo estável é dada por

$$\ln\left[\varphi\left(q\right)\right] = \begin{cases} i\mu q-\gamma\left|q\right|^{\alpha}\left[1-i\beta\frac{q}{|q|}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right] & \text{se } \alpha\neq 1 \\ i\mu q-\gamma\left|q\right|\left[1+i\beta\frac{q}{|q|}\frac{2}{\pi}\ln\left(\left|q\right|\right)\right] & \text{se } \alpha=1 \end{cases},$$

onde

$$0<\alpha\leqslant 2,$$

γ é um fator de escala positivo, μ é um número real qualquer (valor esperado) e β é um parâmetro de assimetria que varia no intervalo de -1 a 1. O livro de Mantegna e Stanley afirma que só são conhecidas as formas analíticas das distribuições de Lévy (processos estocásticos de Lévy) com os parâmetros:

- $\alpha=1$ e $\beta=1$ (distribuição de Lévy-Smirnov);
- $\alpha=1$ e $\beta=0$ (distribuição lorentziana);
- $\alpha=2$ (distribuição gaussiana).

O livro então informa que, no caso simétrico, isto é, quando $\beta=0$, e com média zero, ou seja, $\mu=0$, a distribuição estável, para x muito grande, tem a forma assintótica:

$$P\left(\left|x\right|\right) \sim \left|x\right|^{-(1+\alpha)}.$$

Uma consequência importante desse resultado é que o valor esperado de

$$\left|x\right|^{n}$$

diverge para

$$n \geqslant \alpha$$

quando $\alpha<2$. Assim, em particular, todos os processos estáveis de Lévy com $\alpha<2$ têm variâncias infinitas. Por exemplo, a distribuição lorentziana, isto é,

$$p\left(x\right) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^{2}+x^{2}},$$

dá uma variância infinita:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\left(x\right) &= \left\langle x^{2}\right\rangle-\left\langle x\right\rangle^{2}=\frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{x^{2}}{\gamma^{2}+x^{2}}-\left[\frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{x}{\gamma^{2}+x^{2}}\right]^{2} \\ &= \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{x^{2}+\gamma^{2}-\gamma^{2}}{\gamma^{2}+x^{2}}-0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{var}\,(x) \quad = \quad \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{x^2+\gamma^2}{\gamma^2+x^2} - \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\gamma^2}{\gamma^2+x^2} = \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx - \gamma^2 \to \infty.$$

Baseado nesses estudos, a distribuição do tamanho de passos do Sr. Pessoa é estável? :???: Vejamos: a variância não é infinita, pois o Sr. Pessoa, como qualquer outra pessoa, jamais daria um passo sequer de comprimento infinito. Logo, a distribuição dos passos não pode ter uma variância infinita. Então, se a distribuição dos passos do Sr. Pessoa for estável, não poderá ter $\alpha < 2$ e, se for estável, terá $\alpha = 2$ e, portanto, será uma gaussiana! :cool: Nada pode ser dito, com base no que apresentei aqui, sobre o caso em que os passos do Sr. Pessoa sejam distribuídos de forma não estável. Mas aposto na gaussiana! :cool: