Auto-similaridade e escalas para distribuições estáveis

Normalmente, uma distribuição que assintoticamente decai como uma lei de potência não possui uma escala característica. Nicolaus Bernoulli inventou um paradoxo que depois foi descrito por Daniel Bernoulli em uma publicação da Academia de São Petersburgo. Ficou conhecido como "o paradoxo de São Petersburgo" e pode ser enunciado, de forma adaptada, como segue. Um cassino propõe um jogo em que o jogador paga uma quantia para jogar. Quando o jogador entra em uma partida, uma moeda é lançada seguidamente até que o resultado dê cara. Quando dá cara, a partida acaba. Se o primeiro lance dá cara, o jogador recebe um real. Se a moeda dá cara apenas no segundo lance, o jogador recebe dois reais. Recebe quatro reais se sai cara apenas no terceiro lance, etc. :smile: Quanto o cassino deve cobrar para o jogador entrar? :roll:

Para tentar responder, vejamos quanto recebe o jogador caso a cara saia apenas no n-ésimo lance da moeda pelo cassino. Ora, o jogador recebe

$$2^{n-1}$$

reais. Calculemos o valor esperado de quanto o jogador pode receber. A probabilidade de que logo no primeiro lance saia uma cara é $1/2$. Se $n=2$, a probabilidade é $1/4$; se $n=3$, a probabilidade é $1/2^3$ e assim por diante. Enfim, o valor recebido esperado é

$$\begin{aligned}\langle V\rangle &= 1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+\cdots+2^{k-1}\frac{1}{2^k}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Para ser racional, portanto, o cassino deve cobrar muitíssimo caro para que o jogador jogue esse jogo. E, racionalmente também, o jogador não deve pagar caro, pois, a probabilidade de conseguir dois reais ou menos é $3/4$, a de conseguir quatro reais ou menos é $7/8$, etc. e, portanto, não vê probabilidade um de ganhar um valor que compense um preço para entrar no jogo deveras alto. Logo, o cassino e o jogador jamais chegam a um acordo e o jogo não é jogado. Ambos não concordam porque querem encontrar uma escala característica que não existe nesse problema. :cool:

Que estória é essa de escala característica? :roll:

Para simplificar, consideremos distribuições de Lévy simétricas e de média zero, cujas funções características têm, portanto, a forma

$$\varphi(q) = \exp\left(-\gamma\,|q|^{\alpha}\right),$$

onde

$$0<\alpha\leqslant 2$$

e γ é um fator de escala positivo. Essas distribuições são estáveis, como estudamos na postagem sobre distribuições estáveis. Para n variáveis estocásticas independentes e identicamente distribuídas segundo a distribuição de Lévy acima, temos a função característica

$$\begin{aligned}\varphi_n(q) &= [\varphi(q)]^n \\ &= \exp\left(-n\gamma\,|q|^{\alpha}\right).\end{aligned}$$

A distribuição de probabilidade, P_n, associada à variável

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

é obtida pela transformada de Fourier inversa de $\varphi_n(q)$:

$$P_n(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\,\exp\left(-n\gamma\,|q|^{\alpha}-iqX\right).$$

Como não temos uma forma analítica para essa integral, podemos calcular a densidade de probabilidade para $X=0$:

$$\begin{aligned}P_n(X=0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\,\exp\left(-n\gamma\,|q|^{\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dq\,\exp\left(-n\gamma q^{\alpha}\right).\end{aligned}$$

O resultado dessa integral pode ser expresso em termos da função gama, que é definida como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} \exp(-t).$$

Assim, fazemos a identificação:

$$t = n\gamma q^\alpha$$

e, portanto,

$$q = \left(\frac{t}{n\gamma}\right)^{1/\alpha}.$$

Logo,

$$P_n(X=0) = \frac{1}{\pi (n\gamma)^{1/\alpha}} \int_0^\infty d\left(t^{1/\alpha}\right) \exp(-t).$$

Como

$$d\left(t^{1/\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} t^{1/\alpha - 1} dt,$$

escrevemos:

$$\begin{aligned} P_n(X=0) &= \frac{1}{\pi\alpha (n\gamma)^{1/\alpha}} \int_0^\infty dt\, t^{1/\alpha-1} \exp(-t) \\ &= \frac{1}{\pi\alpha (n\gamma)^{1/\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Quando $n = 1$,

$$\begin{aligned} P_1(X=0) &= \frac{1}{\pi\alpha (\gamma)^{1/\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\ &= n^{1/\alpha} P_n(X=0), \end{aligned}$$

dando a dica de que a distribuição pode ser reescalada pelo fator

$$n^{1/\alpha}.$$

Tentemos, então, a substituição de variável

$$y = \frac{X}{n^{1/\alpha}}$$

na equação

$$P_n(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \exp\left(-n\gamma |q|^\alpha - iqX\right)$$

e o resultado fica assim:

$$P_n(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \exp\left(-n\gamma |q|^\alpha - iqn^{1/\alpha} y\right).$$

Mudemos a variável de integração agora para

$$t = qn^{1/\alpha}.$$

Com isso, temos

$$P_n(X) = \frac{n^{-1/\alpha}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \exp\left(-\gamma |t|^\alpha - ity\right),$$

ou seja,

$$P_n\left(n^{1/\alpha}y\right) = \frac{P_1(y)}{n^{1/\alpha}}.$$

A relação de normalização,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dX\, P_n(X) = 1,$$

também fica satisfeita com a mudança de escala de X acima:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(n^{1/\alpha}y\right)\, P_n\left(n^{1/\alpha}y\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, P_1(y)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Vemos assim que, para qualquer valor de n, uma mera mudança de escala faz com que a distribuição volte a ser a mesma que aquela para $n = 1$. Essa propriedade das distribuições de Lévy significa que são auto-similares.

As distribuições de Lévy são estáveis e auto-similares. Além disso, há um teorema que afirma que uma distribuição de n variáveis estocásticas independentes e identicamente distribuídas converge, conforme n aumenta, a uma distribuição estável. Se a distribuição tiver momentos infinitos, então convergirá para uma distribuição estável não gaussiana. É isso o que afirmam Rosario Nunzio Mantegna e H. Eugene Stanley em seu livro sobre econofísica. :cool: